Հ.Ռ. ԲՈԼԻԲԵԿՅԱՆ, Հ.Գ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ,
Ա.Ա. ՉՈՒԲԱՐՅԱՆ

ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

(մեթոդական ձեռնարկ)

ԵՐԵՎԱՆ – 2008

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Հ.Ռ. ԲՈՒԻԲԵԿՅԱՆ, Հ.Գ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ,
Ա.Ա. ՉՈՒԲԱՐՅԱՆ

ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

(մեթոդական ձեռնարկ)

ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
ԵՐԵՎԱՆ – 2008

ՀՏԴ 510.5 (07)
ԳՄԴ 22.12 ց7
Բ 813

Հրատարակության է երաշխավորել ԵՊՀ ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետի խորհուրդը

Հ.Ռ. ԲՈԼԻԲԵԿՅԱՆ, Հ.Գ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ, Ա.Ա. ՉՈՒԲԱՐՅԱՆ

Բ 813 Ալգորիթմների տեսության խնդիրների ժողովածու (մեթոդական ձեռնարկ): – Եր.: ԵՊՀ-ի հրատ., 2008 թ., 56 էջ:

Առաջարկվող ձեռնարկում ընդգրկված են ալգորիթմների տեսության հիմնարար ենթաթեմաներին վերաբերող խնդիրները, որոնք առաջարկվում են ԻԿՄ ֆակուլտետի ուսանողներին տվյալ առարկայի ընթացիկ քննությունններին:

ԳՄԴ 22.12 ց7

ISBN 978-5-8084-0992-7

ՆԱԽԱԲԱՆ

Առաջարկվող ձեռնարկում ընդգրկված են ալգորիթմների (ընթացակարգերի) տեսության հիմնարար ենթաթեմաների՝ կարգընթացության, ըստ Թյուրինգի հաշվարկելիության, համարակալումների, համապիտանի ֆունկցիաների, բազմությունների ճանաչելիության և կիսաճանաչելիության հիմնական հասկացությունները և հատկությունները, յուրաքանչյուր թեմայի հետ առնչվող մի քանի նմուշային խնդիրների լուծումները, ինչպես նաև տվյալ թեմայի բոլոր այն խնդիրները, որոնք առաջարկվում են ԻԿՄ ֆակուլտետի ուսանողներին տվյալ առարկայի ընթացիկ քննություններին:

Հեղինակները խորին շնորհակալություն են հայտնում ԻԿՄ ֆակուլտետի ուսանողներին՝ *Անի Մարտիրոսյանին, Զարուհի Ասլանյանին, Սերգեյ Բարխուդարյանին, Աշոտ Աբաջյանին, Էդուարդ Ամիրխանյանին, Անուշ Գալստյանին, Լիլիթ Կարապետյանին և Վահե Մաշուրյանին* խնդիրների ցուցակը հարստացնելու, բազմազանեցնելու և ըստ դժվարության խմբավորելու համար: Տեղադրելով սույն խնդրագիրքը էլեկտրոնային կայքում (http://users.freenet.am/~ hbolibek/book.pdf)՝ հեղինակները ակնկալում են բովանդակությունը բարելավող, շարադրությունը շտկող դիտողություններ, ինչպես նաև հնարավոր վրիպակների նկատմամբ ներողամտություն:

Խնդրվում է հնարավոր դիտողությունները ուղարկել հեղինակներից որևէ մեկին հետևյալ հասցեներով՝

Բոլիբեկյան Հովհաննես bolibekhov@ysu.am

Մովսիսյան Հռիփսիմե hripsimemovsesyan@yahoo.com

Անահիտ Չուբարյան achubaryan@ysu.am

1. ԿԱՐԳԸՆԹԱՑ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Դիցուք $N=\{0,1,2,...\}$ ոչ բացասական ամբողջ թվերի բազմությունն է: $f(x_1,...,x_n)$ մասնակի ֆունկցիան կոչվում է թվաբանական, եթե այն արտապատկերում է N^n -ի որևէ ենթաբազմություն N -ի մեջ*:

n փոփոխականից կախված բոլոր թվաբանական ֆունկցիաների բազմությունը նշանակենք $\mathscr{F}^n$ -ով: $f\in\mathscr{F}^n$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը նշանակենք N_f^n: Եթե $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in N_f^n$, ապա կօգտագործենք նաև $!f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ նշանակումը, իսկ $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\notin N_f^n$ դեպքում՝ $\not{!}\,f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ նշանակումը:

x_i փոփոխականը կոչվում է ոչ էական $f\in\mathscr{F}^n$ ֆունկցիայի համար, եթե կամայական $(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},...,\alpha_n)\in N^{n-1}$ և կամայական $\beta',\beta''\in N$ տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝

1. $!f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\beta',\alpha_{i+1},...,\alpha_n)\Leftrightarrow!f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\beta'',\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$
2. եթե $!f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\beta',\alpha_{i+1},...,\alpha_n)\Rightarrow$

$f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\beta',\alpha_{i+1},...,\alpha_n)=f(\alpha_1,...,\alpha_{i-1},\beta'',\alpha_{i+1},...,\alpha_n)$:

Երկու ոչ ամենուրեք որոշված f և g ֆունկցիաների հավասարությունը ($f\simeq g$) հասկացվում է հետևյալ եղանակով. եթե որևէ հավաքածուի վրա ֆունկցիաներից մեկը որոշված է, ապա մյուսը այդ հավաքածուի վրա նույնպես որոշված է, և նրանց արժեքները համընկնում են:

$\mathscr{F}^n$ բազմության որոշակի ենթադաս սահմանելու համար ներմուծենք.

Հենքային ֆունկցիաներ՝

1. $O(x)=0$,
2. $S(x)=x+1$,

---

* Չի բացառվում $n=0$ դեպքը, որը նշվում է $f()$ տեսքով, և $f()$ կամ որոշված չէ, կամ հավասար է որևէ c հաստատունի:

3. $\overline{S}(x) = x \dot{-} 1$, որտեղ $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, \text{եթե } x \geq y \\ 0, \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$:

Գործողություններ՝

1. *Ոչ էական փոփոխականների ներմուծում*

$h(x_1,...,x_n,y_1,...,y_k)$ ֆունկցիան ստացվում է $f(x_1,...,x_n)$ ֆունկցիայից $y_1,...,y_k$ $(k \geq 1)$ ոչ էական փոփոխականների ներմուծմամբ, եթե

ա) $y_1,...,y_k$ փոփոխականները էական չեն $h(x_1,...,x_n,y_1,...,y_k)$ ֆունկցիայի համար,

բ) $f(x_1,...,x_n) \simeq h(x_1,...,x_n,y_1,...,y_k)$:

2. *Կանոնավոր տեղադրություն*

$h(y_1,...,y_k)$ ֆունկցիան կոչվում է $f(x_1,...,x_n)$ և $g_i(y_1,...,y_k)$ $(1 \leq i \leq n)$ ֆունկցիաների կանոնավոր տեղադրության արդյունք, եթե $h(y_1,...,y_k) \simeq f(g_1(y_1,...,y_k),...,g_n(y_1,...,y_k))$:

3. *Պարզագույն անդրադարձում*

$f(x_1,...,x_n,y)$ ֆունկցիան կոչվում է $\alpha(x_1,...,x_n)$ և $\beta(x_1,...,x_n,y,z)$ ֆունկցիաների պարզագույն անդրադարձման արդյունք, եթե

$$\begin{cases} f(x_1,...,x_n,0) \simeq \alpha(x_1,...,x_n) \\ f(x_1,...,x_n,y+1) \simeq \beta(x_1,...,x_n,y,f(x_1,...,x_n,y)) \end{cases}:$$

4. *Նվազագույնի որոնում*

$\psi(x_1,...,x_n)$ ֆունկցիան կոչվում է $\varphi(x_1,...,x_n,y)$ ֆունկցիայի նկատմամբ նվազագույնի որոնման արդյունք (նշանակվում է $\psi(x_1,...,x_n) \simeq \mu_y(\varphi(x_1,...,x_n,y)=0)$), եթե բավարարվում են հետևյալ պայմանները.

$!\psi(x_1,...,x_n) \Leftrightarrow$ ա) $\exists y\ \varphi(x_1,...,x_n,y)=0$ և

բ) $\forall t < y\ !\varphi(x_1,...,x_n,t) \neq 0$

և $\psi(x_1,...,x_n)$ որպես արժեք ընդունում է հենց այդ y (եթե այն գոյություն ունի):

$f \in \mathcal{F}^n$ ֆունկցիան կոչվում է *մասնակի կարգընթաց ֆունկցիա (մ.կ.ֆ.)*, եթե այն հենքայիններից որևէ մեկն է կամ ստացվում է հենքայիններից վերջավոր անգամ կիրառելով 1-4 գործողությունները:

Ամենուրեք որոշված f մ.կ.ֆ. ($N_f^n = N^n$) կոչվում է *ընդհանուր կարգընթաց ֆունկցիա (ը.կ.ֆ.)*:

$f \in \mathcal{F}^n$ ֆունկցիան կոչվում է *պարզագույն կարգընթաց ֆունկցիա (պ.կ.ֆ.),* եթե այն հենքայիններից որևէ մեկն է կամ ստացվում է հենքայիններից վերջավոր անգամ կիրառելով 1-3 գործողությունները:

Օրինակ

Ապացուցենք $f(x, y) = x + y$ ֆունկցիայի պարզագույն կարգընթացությունը:

Քանի որ $\begin{cases} f(x,0) = x + 0 = x \\ f(x, y+1) = x + (y+1) = (x+y)+1 \end{cases}$, ապա եթե վերցնենք $\alpha(x) = x = \overline{S}(S(x))$ և $\beta(x, y, z) = z + 1$, ապա $f(x, y) = x + y$ ֆունկցիայի պարզագույն կարգընթացությունը հիմնավորվում է հետևյալ եղանակով՝

ա) կիրառելով $\overline{S}(x)$ և $S(x)$ ֆունկցիաների նկատմամբ 2 գործողությունը՝ ստանում ենք $\alpha(x)$-ը,

բ) կիրառելով $S(z) = z + 1$ ֆունկցիայի նկատմամբ 1 գործողությունը, ստանում ենք $\beta(x, y, z)$-ը

գ) $\alpha(x)$ և $\beta(x, y, z)$ ֆունկցիաների նկատմամբ կիրառելով 3 գործողությունը, ստանում ենք $f(x, y) = x + y$:

Խնդիրներ

Ի՞նչ ֆունկցիա է ստացվում α և β ֆունկցիաներից պարզագույն անդրադարձման միջոցով:

1. $\alpha(x) = 1, \beta(x, y, z) = z \cdot x$
2. $\alpha(x) = 0, \beta(x, y, z) = z + x$

3. $\alpha(x) = 1, \beta(x, y, z) = z + 2x$

4. $\alpha(x) = 1, \beta(x, y, z) = z + 3x$

5. $\alpha(x) = 1, \beta(x, y, z) = c \cdot x$

6. $\alpha(x) = 1, \beta(x, y, z) = z \cdot x^2$

7. $\alpha(x) = 1, \beta(x, y, z) = z \cdot x^3$

8. $\alpha(x) = 2x, \beta(x, y, z) = z \dot{-} 1$

9. $\alpha(x) = x, \beta(x, y, z) = z + 3$

10. $\alpha(x) = 1, \beta(x, y, z) \simeq x^z$

11. $\alpha(x) = x, \beta(x, y, z) \simeq z^x$

12. $\alpha(x) = x, \beta(x, y, z) \simeq x^z$

13. $\alpha(x) = 3, \beta(x, y, z) \simeq x^y$

14. $\alpha(x) = 2x, \beta(x, y, z) = z \dot{-} 2$

15. $\alpha(x) = 1, \beta(x, y, z) = x + z$

16. $\alpha(x) = x, \beta(x, y, z) = z \cdot x$

17. $\alpha(x) = 0, \beta(x, y, z) = x + 3z$

18. $\alpha(x) = 2, \beta(x, y, z) = z \dot{-} 4x$

19. $\alpha(x) = 1, \beta(x, y, z) = z^2 + 6x$

20. $\alpha(x) = x, \beta(x, y, z) = z + (x \dot{-} y)$

21. $\alpha(x) = 0, \beta(x, y, z) = (z \dot{-} x) + y$

22. $\alpha(x) = x, \beta(x, y, z) \simeq y^x \cdot z$

23. $\alpha(x) = 0, \beta(x, y, z) = x + y + z$

24. Գտնել $\psi(x) \simeq \mu_y\left(7 \dot{-} \left[\dfrac{x \dot{-} y}{3y + 1}\right] = 0\right)$ որոշման տիրույթը:

25. Հաշվել $\psi(10)$, եթե $\psi(x) \simeq \mu_y\left(\left(7 \dot{-} \left[\dfrac{7y}{2y + 3}\right]\right) \dot{-} 3 = 0\right)$:

26. Հաշվել $\psi(0)$ և $\psi(9)$, եթե $\psi(x) \simeq \mu_y\left(5 \dot{-} \left[\dfrac{x \dot{-} y \dot{-} 1}{2y+3}\right] = 0\right)$:

27. Հաշվել $\psi(10)$, եթե $\psi(x) \simeq \mu_y\left(\left[\dfrac{x \dot{-} y}{5}\right] = 0\right)$:

28. Հաշվել $\psi(7)$, եթե $\psi(x) \simeq \mu_y\left(\left[\dfrac{x}{y \dot{-} 3}\right] = 0\right)$:

Ապացուցել հետևյալ ֆունկցիաների պարզագույն կարգընթացությունը՝

29. $f(x) = n \ (n \in N)$

30. $f(x) = x + n \ (n \in N)$

31. $f(x, y) = x + y$

32. $f(x, y) = x \cdot y$

33. $f(x, y) = x^y \ (0^0 = 1)$

34. $f(x) = x! \ (0! = 1)$

35. $sg(x) = \begin{cases} 0, \text{ եթե } x = 0 \\ 1, \text{ եթե } x > 0 \end{cases}$

36. $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 1, \text{ եթե } x = 0 \\ 0, \text{ եթե } x > 0 \end{cases}$

37. $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, \text{ եթե } x \geq y \\ 0, \text{ եթե } x < y \end{cases}$

38. $f(x, y) = |x - y|$

39. $f(x, y) = \max(x, y)$

40. $f(x, y) = \min(x, y)$

Ապացուցել հետևյալ ֆունկցիաների պարզագույն կարգընթացությունը՝ օգտագործելով $g(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, $\alpha(y_1, \ldots y_m)$ և $\beta(y_1, \ldots, y_m)$ ֆունկցիաների պարզագույն կարգընթացությունը.

41. $f(x_1,...,x_n,y,z)=\begin{cases}\sum_{i=y}^{z} g(x_1,...,x_n,i), \text{ եթե } y\le z\\ 0, \text{ եթե } y>z\end{cases}$

42. $f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)=\begin{cases}\sum_{i=\alpha(y_1,...,y_m)}^{\beta(y_1,...,y_m)} g(x_1,...,x_n,i), \text{ եթե}\\ \qquad \alpha(y_1,...,y_m)\le\beta(y_1,...,y_m)\\ 0, \text{ մնացած դեպքերում}\end{cases}$

43. $f(x_1,...,x_n,y,z)=\begin{cases}\prod_{i=y}^{z} g(x_1,...,x_n,i), \text{ եթե } y\le z\\ 0, \text{ եթե } y>z\end{cases}$

44. $f(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)=\begin{cases}\prod_{i=\alpha(y_1,...,y_m)}^{\beta(y_1,...,y_m)} g(x_1,...,x_n,i), \text{ եթե}\\ \qquad \alpha(y_1,...,y_m)\le\beta(y_1,...,y_m)\\ 0, \text{ մնացած դեպքերում}\end{cases}$

45. Կասենք, որ $f(x_1,...,x_n)$ ֆունկցիան ստացվում է $g(x_1,...,x_n,y)$ և $h(x_1,...,x_n)$ ֆունկցիաներից սահմանափակ նվազագույնի որոնման գործողությամբ, եթե $\mu_y(g(x_1,...,x_n,y)=0)$ որոշված է բոլոր $x_1,...,x_n$ համար և չի գերազանցում $h(x_1,...,x_n)$: Ապացուցել, որ եթե $f(x_1,...,x_n)$ ֆունկցիան ստացվում է $g(x_1,...,x_n,y)$ և $h(x_1,...,x_n)$ պարզագույն կարգընթաց ֆունկցիաներից սահմանափակ նվազագույնի որոնման գործողությամբ, ապա այն պարզագույն կարգընթաց է:

46. Դիցուք $h_1,...,h_m$ այնպիսի ֆունկցիաներ են, որ կամայական $x_1,x_2,...,x_n$ բնական թվերի համար նրանցից մեկը և միայն մեկն է հա-

վասարվում 0: Ապացուցել, որ եթե $g_1,...,g_m$ և $h_1,...,h_m$ ֆունկցիանե-րը պարզագույն կարգընթաց են, ապա

$$f(x_1,...,x_n)=\begin{cases} g_1(x_1,...,x_n), \text{ եթե } h_1(x_1,...,x_n)=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1,...,x_n), \text{ եթե } h_1(x_1,...,x_n)=0 \end{cases}$$

ֆունկցիան պարզագույն կարգընթաց է:

47. Ապացուցել, որ պարզագույն (մասնակի, ընդհանուր) կարգըն-թաց ֆունկցիաների դասը չի փոխվի, եթե $\overline{S}(x)$ հիմքային ֆունկցիայի փոխարեն վերցնել $I_m^n(x_1,x_2,...x_n)=x_m$ $(1\le m\le n)$ ֆունկցիան և չօգ-տագործել ոչ էական փոփոխականների ներմուծման գործողությունը:

Ապացուցել հետևյալ ֆունկցիաների պարզագույն կարգընթացու-թյունը`

48. $f(x,y)=\left[\dfrac{x}{y}\right]$ x-ը y-ի վրա բաժանելիս ստացվող քանորդը $\left(\left[\dfrac{x}{0}\right]=x\right)$

49. $f(x,y)=rm(x,y)$` x-ը y-ի վրա բաժանելիս ստացվող մնացորդը $(rm(x,0)=x)$

50. $\tau(x)=$ «x թվի բաժանարարների քանակին» $(\tau(0)=0)$

51. $\sigma(x)=$ «x թվի բաժանարարների գումարին» $(\sigma(0)=0)$

52. $lh(x)=$ «x թվի պարզ բաժանարարների քանակին» $(lh(0)=0)$

53. $\pi(x)=$ «x թիվը չգերազանցող պարզ թվերի քանակին»

54. $h(x,y)=$ «x և y թվերի ամենափոքր ընդհանուր բազմապա-տիկին» $(h(x,0)=h(0,y)=0)$

55. $d(x,y)=$ «x և y թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարա-րին» $(d(0,0)=0)$

56. $p(x)=$ «x-րդ պարզ թվին» $(p(0)=2, p(1)=3, p(2)=5,...)$

57. $long(x) =$ «x թվի ամենամեծ պարզ բաժանարարի համարին»

58. $ex(x, y) =$ «պարզ արտադրիչների տեսքով y թվի վերլուծության մեջ x-րդ պարզ թվի աստիճանի ցուցիչին» $(ex(x,0) = 0)$

59. $f(x, y) = \left[\sqrt[y]{x}\right] \left(\left[\sqrt[0]{x}\right] = x\right)$

60. $f(x, y) = \left[C_y^x\right]$ $(C_y^x = 1,$ եթե $y \le x)$

61. $f(x) = \left[e \cdot x\right]$

62. $f(x) = \left[e^x\right]$

63. $f(x) = x!!$ (x-ը չգերազանցող բոլոր դրական զույգ/կենտ թվերի արտադրյալին, եթե x-ը զույգ/կենտ է:)

64. Դիցուք $v_1(x), \ldots, v_s(x)$ ամենուրեք որոշված թվաբանական ֆունկցիաներ են, որոնք կամայական x-ի համար բավարարում են $v_i(x+1) \le x$ $(i = 1,\ldots,s)$ պայմաններին: Կասենք, որ $f(x_1,\ldots,x_{n+1})$ ֆունկցիան ստացվում է $g(x_1,\ldots,x_n)$, $h(x_1,\ldots,x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+s+1})$ և $v_1(x), \ldots, v_s(x)$ ֆունկցիաներից ընդհանուր անդրադարձում գործողությամբ, եթե $x_1,\ldots,x_n, y$ փոփոխականների բոլոր արժեքների համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$f(x_1,\ldots,x_n,0) \simeq g(x_1,\ldots,x_n),$$

$$f(x_1,\ldots,x_n,y+1) \simeq h(x_1,\ldots,x_n,y,f(x_1,\ldots,x_n,v_1(y+1)),\ldots,$$

$$f(x_1,\ldots,x_n,v_s(y+1)))\text{:}$$

Ապացուցել, որ եթե $f(x_1,\ldots,x_{n+1})$ ֆունկցիան ստացվում է $g(x_1,\ldots,x_n)$, $h(x_1,\ldots,x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+k+1})$, $v_1(x), \ldots, v_s(x)$ պարզագույն կարգընթաց ֆունկցիաներից ընդհանուր անդրադարձում գործողությամբ, ապա այն պարզագույն կարգընթաց է:

Ապացուցել հետևյալ առնչություններով տրվող ֆունկցիաների պարզագույն կարգընթացությունը՝

65. $f(0) = 0, f(1) = 1, f(n+2) = f(n) + f(n+1)$

66. $f(0) = 0, f(1) = 1, f(n+2) = 2f(n) + f(n+1)$

67. $f(0)=0, f(1)=1, f(n+2)=2f(n)+(3f(n+1)\dot{-}1)$

68. $f(0)=2, f(1)=4, f(n+2)=3f(n+1)\dot{-}(2f(n)+1)$

69. $f(0)=2, f(1)=3, f(n+2)=4f(n+1)\dot{-}(f(n)+1)$

70. $f(0)=2, f(1)=3, f(n+2)=4f(n+1)\dot{-}(f(n)+1)$

71. $f(0)=1, f(1)=1, f(n+2)=3f(n+1)\dot{-}(f(n)+4)$

72. $f(0)=2, f(1)=3, f(n+2)=f(n+1)\cdot(f(n)+1)$

73. $f(0)=2, f(1)=3, f(n+2)=f(n+1)\cdot(f(n)+1)$

74. $f(0)=3, f(1)=4, f(n+2)=3f(n+1)^{f(n)}$

75. $f(0)=0, f(1)=2, f(n+2)=(f(n+1)\dot{-}1)\cdot f(n)$

76. Էյլերի ֆունկցիան, որը հավասար է x-ը չգերազանցող և x-ի հետ փոխադարձաբար պարզ թվերի քանակին:

77. Ապացուցել, որ յուրաքանչյուր ամենուրեք որոշված ֆունկցիա, որի արժեքը հավասար է a՝ բացառությամբ վերջավոր թվով կետերում, պարզագույն կարգընթաց է:

78. Դիցուք $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաները որոշված են հետևյալ ձևով՝

$$\begin{cases} f(0)=a,\ g(0)=b \\ f(x+1)=h_1(x, f(x), g(x)) : \\ g(x+1)=h_2(x, f(x), g(x)) \end{cases}$$

Ապացուցել $f(x)$ և $g(x)$ ֆունկցիաների պարզագույն կարգընթացությունը, եթե $h_1(x,y,z)$ և $h_2(x,y,z)$ ֆունկցիաները պարզագույն կարգընթաց են:

79. Ապացուցել, որ յուրաքանչյուր պարզագույն կարգընթաց ֆունկցիա ընդհանուր կարգընթաց է:

80. Ապացուցել, որ տեղադրության և պարզագույն անդրադարձման գործողությունները փակ են ընդհանուր կարգընթաց ֆունկցիաների դասի նկատմամբ:

81. Ապացուցել, որ եթե պարզագույն կարգընթաց (ընդհանուր կարգընթաց, մասնակի կարգընթաց) ֆունկցիաների արժեքները փոխել վերջավոր թվով կետերում, ապա ստացվող ֆունկցիան նս կլինի պարզագույն կարգընթաց (ընդհանուր կարգընթաց, մասնակի կարգընթաց):

Ապացուցել հետևյալ ֆունկցիաների պարզագույն կարգընթացությունը՝

82. $f(x) =$ « x -ի զույգ բաժանարարների քանակին»

83. $f(x) =$ « x -ի կենտ բաժանարարների քանակին»

84. $f(x) =$ « x -ի պարզ բաժանարարների քանակին»

85. $f(x) =$ « x -ը չգերազանցող զույգ թվերի քանակին»

86. $f(x) =$ « x -ը չգերազանցող կենտ թվերի քանակին»

87. $f(x) =$ « x -ը չգերազանցող պարզ թվերի քանակին»

88. $f(x, y) =$ « x -ի և y -ի ընդհանուր պարզ բաժանարարների քանակին»

89. $f(x) =$ « x -ը չգերազանցող կենտ թվերի գումարին»

90. $f(x) =$ « x -ը չգերազանցող զույգ թվերի գումարին»

91. $f(x) =$ « x -ի պարզ բաժանարարների գումարին»

92. $f(x) =$ « x -ը չգերազանցող պարզ թվերի գումարին»

93. $f(x, y) =$ « x -ի և y -ի ընդհանուր բաժանարարների գումարին»

94. $f(x, y) =$ « x -ի և y -ի ընդհանուր պարզ բաժանարարների գումարին»

95. $f(x, y) =$« y -ից ոչ փոքր և $5x$ -ը չգերազանցող կատարյալ թվերի գումարին»

96. $f(x, y) =$ « x -ի և y -ի ընդհանուր բաժանարարների արտադրյալին»

97. $f(x) =$« x -ից փոքր պարզ թվերի արտադրյալին»

98. $f(x, y) =$« x -ից ոչ փոքր և $3y$ -ը չգերազանցող կատարյալ թվերի գումարին»

99. $f(x, y) =$« x -ից մեծ և $2y$ -ը չգերազանցող պարզ թվերի արտադրյալին»

100. $f(x) =$ « x -ը չգերազանցող պարզ երկվորյակների քանակին»

101. $f(x)=\left[\dfrac{x}{[\log_2 x]}\right]$

102. $f(x,y)=(x!)^y$

103. $\max(x_1,...,x_n)$

104. $f(x,y,z)=\left|x-|y-z|\right|$

105. $f(x)=$« x-ի այն բաժանարարների քանակին, որոնք բաժանվում են 3 վրա առանց մնացորդի»

106. $f(x,y)=\begin{cases} y, \text{ եթե } x \text{ և } y \text{ փոխադարձաբար պարզ են} \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում} \end{cases}$

107. $f(x,y)=\begin{cases} x+y, \text{ եթե } x \geq y \text{ և գոյություն ունի այնպիսի } i \\ \qquad \text{թիվ, որ } y=2^i \\ x \dot{-} y, \text{ հակառակ դեպքերում} \end{cases}$

108. $f(x)=\begin{cases} 5, \text{ եթե } rm(x,3)=0 \\ 4, \text{ եթե } rm(x,3)\neq 0 \text{ և } rm(x,5)=0 \\ 0, \text{ մնացած դեպքերում} \end{cases}$

109. $f(x,y)=$« x-ի և y-ի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարի և ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկի արտադրյալին»

110. $f(x,y,z)=\begin{cases} x, \text{ եթե } y+z=x \\ y, \text{ եթե } x+z=y \\ z, \text{ եթե } x+y=z \\ 0, \text{ մնացած դեպքերում} \end{cases}$

111. $f(x)=$« x-ից փոքր նրա բոլոր կատարյալ բաժանարարների գումարին»

112. $f(x)=$« x-ից փոքր նրա բոլոր կատարյալ թվերի քանակին, որոնք բաժանվում են 3-ի վրա»

113. $f(x,y) = \left[\sqrt[y]{[\log_2 x]}\right]$

114. $f(x) =$ « x -ից փոքր բոլոր այն թվերի քանակին, որոնք բաժանվում են 7 -ի վրա և զույգ չեն»

115. $f(x,y) = \begin{cases} x, \text{ եթե } x > 10 \text{ և } rm(x,y) = 2 \\ 0, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

116. $f(x,y) = \begin{cases} x + y, \text{ եթե } x \text{ բաժանելիս } y \text{ ստացվող} \\ \qquad \text{մնացորդը պարզ թիվ է} \\ 0, \text{ հակառակ դեպքերում} \end{cases}$

117. $f(x) = \begin{cases} x, \text{ եթե } x \text{ զույգ է և որևէ թվի խորանարդ է} \\ 0, \text{ հակառակ դեպքերում} \end{cases}$

118. $f(x,y) = \begin{cases} x, \text{ եթե գոյություն ունի այնպիսի } a \text{ պարզ} \\ \qquad \text{թիվ, որ } x = a^2 \\ 0, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

119. $f(x,y) = \begin{cases} x, \text{ եթե } y \text{ պարզ է} \\ y, \text{ հակառակ դեպքերում} \end{cases}$

120. $f(x) = \begin{cases} x, \text{ եթե } x \text{ բաժանվում է } 7 \text{ և չի բաժանվում } 4 \\ 0, \text{ հակառակ դեպքերում} \end{cases}$

121. $f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ եթե } x \text{ պարզ բաժանարարների քանակը} \\ \qquad \text{հավասար է } y \text{ կատարյալ բաժանարարների} \\ \qquad \text{քանակին} \\ 0, \text{ հակառակ դեպքերում} \end{cases}$

122. $f(x) = \begin{cases} 5^x, \text{ եթե } rm(x,3) = 0 \\ 2x, \text{ եթե } rm(x,3) = 1 \\ 0, \text{ մնացած դեպքերում} \end{cases}$

123. $f(x,y)=\begin{cases} 2x+3y, \text{ եթե } x \text{ կենտ է և } rm(y,3)=2 \\ 8x \dot{-} y, \text{ եթե } x \text{ զույգ է և } rm(y,3)=0 \\ x, \text{ մնացած դեպքերում} \end{cases}$

124. $f(x,y)=\begin{cases} x^2+3y, \text{ եթե } x \text{ և } y \text{ փոխադարձաբար պարզ են} \\ x \dot{-} y, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

125. $f(x,y)=\begin{cases} x^3 \dot{-} y, \text{ եթե } x \text{ պարզ է և } y<x \\ x^2, \text{ եթե } y>x \\ 5, \text{ մնացած դեպքերում} \end{cases}$

126. $f(x,y)=\begin{cases} 2^x, \text{ եթե } x \text{ զույգ է և } y \text{ կենտ} \\ 3^y, \text{ եթե } x \text{ կենտ է և } y \text{ զույգ} \\ 0, \text{ մնացած դեպքերում} \end{cases}$

127. $f(x,y)=\begin{cases} x \dot{-} y, \text{ եթե } x>y \text{ և } y \text{ զույգ է} \\ 2x+3, \text{ եթե } x=y \\ 4, \text{ մնացած դեպքերում} \end{cases}$

128. $f(x,y)=\begin{cases} C(x,y), \text{ եթե } x \text{ պարզ է և } y=2 \\ 5, \text{ հակառակ դեպքերում} \end{cases}$

129. $f(x,y)=\begin{cases} 2x, \text{ եթե } x \text{ զույգ է և} y \text{ կենտ} \\ x+y, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

Ապացուցել հետևյալ ֆունկցիաների մասնակի կարգընթացությունը՝

130. $f(x,y)=\begin{cases} x-y, \text{ եթե } x \ge y \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքում} \end{cases}$

131. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x}{y}, \text{ եթե } x\text{-ը բաժանվում է } y\text{-ի վրա} \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքում} \end{cases}$

132. $f(x)$-ը ամենուրեք անորոշ ֆունկցիա է

133. $f(x) = x$ -րդ պարզ երկվորյակներից առաջինին

134. $$f(x,y) = \begin{cases} 3y \dot{-} 1, \text{ եթե } rm(x,4) = 3 \text{ և } y > 4 \\ 10x, \text{ եթե } rm(x,4) = 1 \text{ և } y = 2 \\ \text{անորոշ, մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

135. $$f(x,y) = \begin{cases} x, \text{ եթե } x \text{ - ի զույգ բաժանարարների քանակը} \\ \quad \text{հավասար է } y \text{ - ի կենտ բաժանարարների} \\ \quad \text{քանակին} \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում} \end{cases}$$

136. $$f(x,y) = \begin{cases} 8, \text{ եթե } x \text{ չգերազանցող կենտ թվերի գումարը} \\ \quad \text{հավասար է } y \text{ չգերազանցողզույգ թվերի} \\ \quad \text{գումարին} \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում} \end{cases}$$

137. $$f(x,y,z) = \begin{cases} z, \text{ եթե } z = x^y \text{ և } z \text{ զույգ է} \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում} \end{cases}$$

138. $$f(x,y) = \begin{cases} 2, \text{ եթե } x \text{ և } y \text{ թվերի բաժանարարների քանակները} \\ \quad \text{հավասար են} \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում} \end{cases}$$

139. $$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ եթե գոյություն ունի } k \text{ բնական թիվ, որ } x = 3^k \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում} \end{cases}$$

140. $$f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ եթե } x \text{ պարզ է և } x \neq 2 \\ 0, \text{ եթե } x \text{ զույգ է} \\ \text{անորոշ, մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

141. $$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ եթե } rm(x,3) = 0 \\ 3, \text{ եթե } rm(x,3) = 1 \\ \text{անորոշ, եթե } rm(x,3) = 2 \end{cases}$$

142. $$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ եթե գոյություն ունի } k \text{ բնական թիվ, որ } x = 2^k \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում} \end{cases}$$

143. $f(x,y)=\begin{cases}2, \text{եթե } x=0 \text{ և } y=2\\ 1, \text{եթե } x=1 \text{ և } y=3\\ \text{անորոշ, մնացած դեպքերում}\end{cases}$

144. $f(x)=\begin{cases}5, \text{եթե } rm(x,4)=0\\ 2, \text{եթե } rm(x,4)=1\\ \text{անորոշ, մնացած դեպքերում}\end{cases}$

145. $f(x,y)=\begin{cases}5^x, \text{եթե } x \text{ կատարյալ է և } y \geq x\\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում}\end{cases}$

146. $f(x,y)=\begin{cases}3, \text{եթե } x \text{ պարզ է և } y \geq x+3\\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում}\end{cases}$

147. $f(x,y)=\begin{cases}7y, \text{եթե } x \text{ զույգ է և } y=7\\ 5 \dot{-} x, \text{եթե } x \text{ զույգ է և } y=3\\ \text{անորոշ, մնացած դեպքերում}\end{cases}$

148. $f(x,y)=\begin{cases}5y, \text{եթե } x \text{ պարզ է և } y \text{ կատարյալ}\\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում}\end{cases}$

149. $f(x,y)=\begin{cases}x \dot{-} 2^y, \text{եթե } x \text{ զույգ է և } y<3x\\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում}\end{cases}$

150. $f(x,y)=\begin{cases}7, \text{եթե } x \text{ զույգ է և } y=2\\ x+y, \text{եթե } x \text{ զույգ է և } y=7\\ \text{անորոշ, մնացած դեպքերում}\end{cases}$

151. $f(x,y)=\begin{cases}x+2^y, \text{եթե } x \text{ պարզ է և } x \leq 5y\\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում}\end{cases}$

152. $f(x,y)=\begin{cases}x+2y, \text{եթե } x \text{ կենտ է և } rm(y,4)=3\\ x \dot{-} y, \text{եթե } x \text{ կենտ է և } rm(y,4)=0\\ \text{անորոշ, մնացած դեպքերում}\end{cases}$

153. $f(x,y)=\begin{cases}|x-2y|, \text{եթե } y \text{ կատարյալ է} \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքում}\end{cases}$

154. $f(x,y)=\begin{cases}2, \text{եթե } x \text{ պարզ է և } y=3 \\ 3, \text{եթե } x \text{ պարզ է և } y=5 \\ \text{անորոշ, մնացած դեպքերում}\end{cases}$

155. $f(x,y)=\begin{cases}x+2, \text{եթե } x \text{ պարզ է և } y \text{ զույգ} \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքում}\end{cases}$

156. $f(x,y)=\begin{cases}1, \text{եթե գոյություն ունի } k, \text{ որ } x=k^y \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքում}\end{cases}$

157. $f(x,y)=\begin{cases}1, \text{եթե } x \text{ և } y \text{ թվերի առավելագույն բաժանա-} \\ \quad \text{րարները հավասար են} \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքում}\end{cases}$

158. $f(x,y)=\begin{cases}2xy, \text{եթե } x \text{ բաժանվում է } 6 \text{ վրա և } y \text{ չի} \\ \qquad \text{բաժանվում } 2^x \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքում}\end{cases}$

159. $f(x,y)=\begin{cases}2, \text{եթե } x \ge 7y \text{ և } y \text{ պարզ է} \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում}\end{cases}$

160. $f(x,y)=\begin{cases}x-y, \text{եթե } x>y \\ y-x, \text{եթե } x<y \\ \text{անորոշ, եթե } x=y\end{cases}$

161. $f(x,y)=\begin{cases}x+y^3, \text{եթե } x \ge 3 \text{ և } y \text{ կենտ է} \\ x \dot{-} y, \text{եթե } x<3 \text{ և } y \text{ զույգ է} \\ \text{անորոշ, մնացած դեպքերում}\end{cases}$

162. $f(x,y)=\begin{cases}x^y, \text{եթե } x \text{ կենտ է և } y \text{ զույգ} \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում}\end{cases}$

163. $f(x,y)=\begin{cases} x+y^2, \text{ եթե } x \text{ կենտ է և } y \text{ կենտ} \\ x\cdot y, \text{ եթե } x \text{ կենտ է և } y \text{ զույգ} \\ \text{անորոշ, մնացած դեպքերում} \end{cases}$

164. $f(x,y)=\begin{cases} x+y+5, \text{ եթե } x \text{ պարզ է և } y>5 \\ x\dot{-}y, \text{ եթե } x \text{ պարզ է և } y\le 5 \\ \text{անորոշ, մնացած դեպքերում} \end{cases}$

165. $f(x,y)=\begin{cases} x+5, \text{ եթե } x \text{ կենտ է և } y=3 \\ x+y, \text{ եթե } x \text{ կենտ է և } y=6 \\ \text{անորոշ, մնացած դեպքերում} \end{cases}$

166. $f(x,y)=\begin{cases} 2, \text{ եթե } x \text{ զույգ է և } y>3x \\ 10x, \text{ եթե } x \text{ զույգ է և } y\le 3x \\ \text{անորոշ, մնացած դեպքերում} \end{cases}$

167. $f(x,y)=\begin{cases} 2+3y, \text{ եթե } x \text{ պարզ է և } y\ge 7 \\ 3+2x, \text{ եթե } x \text{ պարզ է և } y<7 \\ \text{անորոշ, մնացած դեպքերում} \end{cases}$

168. $f(x,y)=\begin{cases} x+2^y, \text{ եթե } x=3 \text{ և } y \text{ պարզ չէ} \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում} \end{cases}$

169. $f(x)=\begin{cases} 2, \text{ եթե } rm(x,y)=0 \\ 3, \text{ եթե } rm(x,y)=1 \\ \text{անորոշ, մնացած դեպքերում} \end{cases}$

170. $f(x,y)=\begin{cases} 2, \text{ եթե } x=3^y \\ \text{անորոշ հակառակ դեպքերում} \end{cases}$

171. $f(x,y)=\begin{cases} 2, \text{ եթե } x<2^y \\ 1, \text{ եթե } x>2^y \\ \text{անորոշ, եթե } x=2^y \end{cases}$

172. $f(x,y)=\begin{cases} 3, \text{ եթե } x \text{ զույգ է և } y \text{ կենտ} \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում} \end{cases}$

173. $f(x,y)=\begin{cases} x\cdot y^s, \text{ եթե } x \text{ պարզ է և } y \text{ պարզ չէ} \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում} \end{cases}$

174. $f(x,y)=\begin{cases} x+y, \text{ եթե } x \text{ որևէ թվի ֆակտորիալ է և} \\ \quad y \text{ կատարյալ} \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում} \end{cases}$

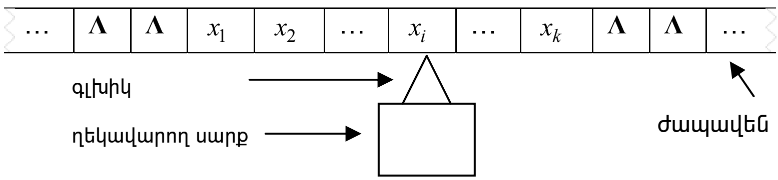
175. $f(x,y)=\begin{cases} z, \text{ եթե } z^y = x \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքերում} \end{cases}$

176. $f(x,y)=\begin{cases} 1, \text{ եթե } x \text{ պարզ է} \\ 2, \text{ եթե } x \text{ կատարյալ է} \\ \text{անորոշ, մնացած դեպքերում} \end{cases}$

177. $f(x,y)=\begin{cases} x+y, \text{ եթե } x=2^y \text{ և } y=3^x \\ \text{անորոշ, հակառակ դեպքում} \end{cases}$

2. ԹՅՈՒՐԻՆԳԻ ՄԵՔԵՆԱՆԵՐ

Թյուրինգի մեքենայի բաղադրիչներն են՝ ժապավենը, գրող-կարդացող գլխիկը և ղեկավարող սարքը.



Թյուրինգի մեքենան աշխատում է ժամանակի առանձին *t=0, 1, 2,…* պահերին: Ժապավենը աջից և ձախից անվերջածիգ է: Այն բաժանված է բջիջների, որոնցից յուրաքանչյուրում ժամանակի ցանկացած պահին գրված է ճիշտ մեկ նիշ $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}\ (n\geq 1)$ մուտքի-ելքի այբուբենից: A - ում առանձնացված է դատարկ նիշը՝ **Λ:** Ժամանակի յուրաքանչյուր պահին ժապավենի վերջավոր թվով բջիջներից բացի, մնացած բջիջներում գրված է **Λ**: **Λ** պարունակող բջիջներն անվանենք դատարկ:

Գրող-կարդացող գլխիկը ժամանակի յուրաքանչյուր պահին դիտարկում է մեկ բջիջ, կարդում այդ բջջում գրված նիշը, նրա փոխարեն գրում որևէ նիշ A - ից (հնարավոր է՝ նույն կարդացած նիշը):

Ղեկավարող սարքը ժամանակի յուրաքանչյուր պահին գտնվում է վիճակների $Q=\{q_0,q_1...,q_{r-1},p_1,...,p_m\}$ $(r,m\geq 1)$ վերջավոր բազմությունից որևէ մեկում: q_0 վիճակն առանձնացված է Q բազմությունում և կոչվում է սկզբնական վիճակ: Ենթադրվում է, որ Թյուրինգի մեքենան սկսում է իր աշխատանքը ժամանակի սկզբնական՝ $t = 0$ պահին, գտնվելով սկզբնական՝ q_0 վիճակում: $\bar{Q}=\{q_0,q_1...,q_{r-1}\}\subset Q$ բազմության տարրերը կոչվում են գործող վիճակներ, $P=\{p_1,...,p_m\}\subset Q$ բազմության տարրերը՝ եզրափակիչ վիճակներ: Համարում ենք, որ հայտնվելով որևէ եզրափակիչ վիճակում, Թյուրինգի մեքենան ավարտում է աշխատանքը (կանգ է առնում): Ղեկավարող սարքը, ելնելով իր վիճակից և գլխիկի կողմից դիտարկվող նիշից, կարող է՝

ա) փոխել իր վիճակը;

բ) փոխել դիտարկվող նիշը;

գ) փոխել գլխիկի դիրքը, հաջորդ պահին տեղափոխելով այն հարևան աջ կամ ձախ բջիջներ, կամ թողնել տեղում (այսինքն հաջորդ պահին գլխիկը կդիտարկի այդ պահին իր կողմից գրված նիշը):

Նշված գործողությունները բնութագրվում են համապատասխանաբար 3 արտապատկերումներով.

$$\lambda:\bar{Q}\times A\to Q$$

$$\delta:\bar{Q}\times A\to A$$

$$\nu:\bar{Q}\times A\to\{\text{Ա},\text{Ձ},\text{Տ}\}$$

Սահմանում

$T_{q_0}=<A,Q,\lambda,\delta,\nu>$ հնգյակը, որտեղ A,Q բազմությունները և λ,δ,ν արտապատկերումները նկարագրված են վերևում, կոչվում է Թյուրինգի մեքենա:

Նկարագրենք Թյուրինգի մեքենայի աշխատանքի ընթացքը ժամանակի $t,(t+1)$ - րդ պահերին $(t\geq 0)$:

Ենթադրենք, $t-$ րդ պահին Թյուրինգի մեքենան գտնվում է $q(t)\,(q(0)=q_0)$ վիճակում, իսկ գրող-կարդացող գլխիկը դիտարկում է x նիշը:

ա) Եթե $q(t)\in \mathrm{P}$, ապա Թյուրինգի մեքենայի աշխատանքն ավարտվում է:

բ) Եթե $q(t)\in \bar{\mathrm{Q}}$, ապա դիտարկվող բջջում x նիշի փոխարեն գրվում է $\delta(q(t),x)$ նիշը, *(t+1)* – րդ պահին ղեկավարող սարքի վիճակը՝ $q(t+1)=\lambda(q(t),x)$, իսկ գրող-կարդացող գլխիկը դիտարկում է նույն բջիջը, եթե $\nu(q(t),x)=$ Տ, հարևան աջ բջիջը, եթե $\nu(q(t),x)=$ Ա և հարևան ձախ բջիջը, եթե $\nu(q(t),x)=$ Ձ :

Անհրաժեշտ է շեշտել, որ աշխատանքի և՛ սկզբում, և՛ վերջում, եթե աշխատանքն ավարտվել է, Թյուրինգի մեքենայի գլխիկը պետք է գտնվի առաջին ոչ դատարկ բջջի վրա:

Թյուրինգի մեքենայի տրման եղանակները

Թյուրինգի մեքենաները կարելի է նկարագրել երկու եղանակով՝ աղյուսակային և ուրվապատկերային:

Աղյուսակային եղանակով ներկայացման դեպքում $T_{q_0} =< A,Q,\lambda,\delta,\nu >$ Թյուրինգի մեքենան, որտեղ՝

$A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, $Q=\{q_0,q_1...,q_{r-1},p_1,...,p_m\}$,

$\lambda:\bar{Q}\times A\to Q$,

$\delta:\bar{Q}\times A\to A$,

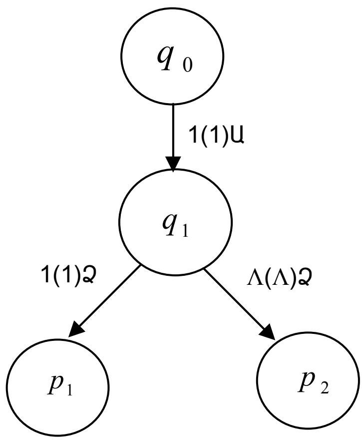
ν: $\bar{Q}\times A\to\{$Ա, Ձ, Տ$\}$,

տրվում է հետևյալ r x n չափանի աղյուսակի միջոցով.

	a_1	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
q_0					
$\vdots$					
q_i			$\lambda(q_i,a_j),\delta(q_i,a_j),\nu(q_i,a_j)$		
$\vdots$					
q_{r-1}					

$T_{q_0} =< A, Q, \lambda, \delta, \nu >$ Թյուրինգի մեքենայի ուրվապատկերային եղանակով ներկայացման դեպքում Q բազմության յուրաքանչյուր h վիճակին համապատասխանեցվում է գագաթ – շրջանակ, որի ներսում գրվում է h նիշը: Յուրաքանչյուր i - ի համար $(0 \le i \le r-1)$, q_i - ին համապատասխանող շրջանակից դուրս են գալիս $|A|$ հատ աղեղներ, որոնցից յուրաքանչյուրի վրա նշվում է A բազմության համապատասխան a_j $(1 \le j \le n)$ նիշը: q_i -ին համապատասխան գագաթից դուրս եկող և a_j նիշով նշված աղեղը ուղղվում է դեպի $\lambda(q_i, a_j)$ -ին համապատասխան գագաթը, և այդ աղեղի վրա a_j նիշից հետո փակագծերում գրվում է $\delta(q_i, a_j)$ նիշը և ապա $\nu(q_i, a_j)$ նիշը: Ակնհայտ է, որ այս կերպ կառուցված ուրվապատկերը միարժեքորեն նկարագրում է Թյուրինգի մեքենան:

Դիտարկենք Թյուրինգի մեքենայի ուրվապատկերային եղանակով ներկայացման մի օրինակ: Դիցուք, Թյուրինգի մեքենան, սկսելով աշխատանքը 1-երից կազմված կամայական $n+1$ երկարության բառի վրա, պարզապես ստուգում է՝ $n=0$, թե ոչ, բառը թողնելով անփոփոխ: Ընդ որում՝ աշխատանքն ավարտում է այդ բառի ամենաձախ նիշի վրա կանգնելով, $n=0$ դեպքում p_1 եզրափակիչ վիճակում, իսկ $n>0$ դեպքում՝ p_2 եզրափակիչ վիճակում: Այս Թյուրինգի մեքենայի ուրվապատկերը ներկայացված է գծագրում:



Քանի որ Թյուրինգի մեքենաները ձևափոխում են իրենց ժապավենի բջիջներում գրված բառերը, ապա դրանց միջոցով թվաբանական ֆունկցիաներ հաշվելու համար ներկայացնենք ֆունկցիայի փոփոխականների արժեքների հավաքածուն բառի տեսքով որոշակի այբուբենում:

$\forall \alpha_i \left(\alpha_i \in N, 1 \le i \le n, n \ge 1\right)$

համար $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ հավաքածուի մեքենայական կոդ (կամ պարզապես կոդ) կանվանենք $\underbrace{1...1}_{\alpha_1+1}*\underbrace{1...1}_{\alpha_2+1}*...*\underbrace{1...1}_{\alpha_n+1}$ բառը, որը կնշանակենք $k(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$-ով: Մասնավորապես, $\underbrace{1...1}_{\alpha\ +1}$ բառը α թվի կոդն է:

Սահմանում

Կասենք, որ T Թյուրինգի մեքենան հաշվում է $f(x_1,x_2,...,x_n)$ թվաբանական ֆունկցիան, եթե $\forall(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ հավաքածուի համար $(\alpha_i \in N, 1\le i\le n)$, սկսելով աշխատանքը $k(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ բառի վրա, ա) վերջավոր քայլերից հետո ավարտում է այն, պարունակելով ժապավենի վրա $k(f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n))$ բառը, եթե $f(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ որոշված է, և բ) կիրառելի չէ $k(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ բառի վրա (այսինքն, աշխատում է անվերջ)՝ հակառակ դեպքում:

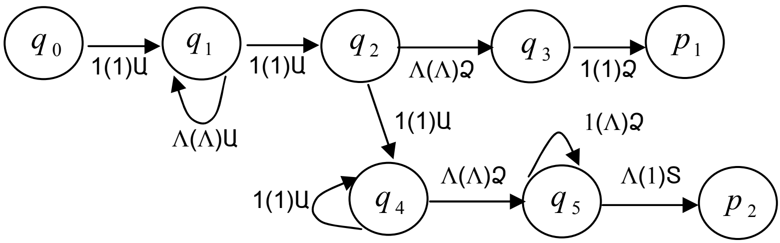
Սահմանում

Կասենք, որ $f(x_1,x_2,...,x_n)$ թվաբանական ֆունկցիան հաշվարկելի է ըստ Թյուրինգի, եթե գոյություն ունի T Թյուրինգի մեքենա, որը այն հաշվում է:

Ապացուցենք մի քանի ֆունկցիաների հաշվելիությունը ըստ Թյուրինգի:

1. $$\left[\frac{1}{x}\right]=\begin{cases}1, \text{եթե } x=1\\ 0, \text{եթե } x\ge 2\\ \text{որոշված չէ, եթե } x=0\end{cases}$$

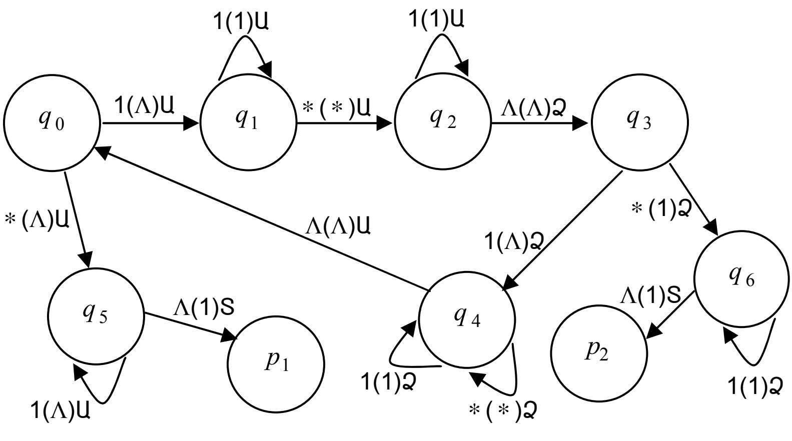
Կառուցենք այս ֆունկցիան հաշվող Թյուրինգի մեքենա ուրվապատկերի միջոցով.



2. Կառուցենք հետևյալ ֆունկցիան հաշվող Թյուրինգի մեքենա.

$$x \dot{-} y = \begin{cases} 0\text{, եթե } x < y \\ x - y\text{, եթե } x \ge y \end{cases}$$

Մեքենան սկզբնական պահին դիտարկում է ժապավենի վրա գրված $\underbrace{1...1}_{x+1}*\underbrace{1...1}_{y+1}$ բառը, ընդ որում մեքենայի գլխիկը գտնվում է q_0 սկզբնական վիճակում և դիտարկում է ժապավենի վրա գրված բառի ամենածախ 1 նիշը: Թյուրինգի մեքենայի աշխատանքը կազմակերպենք հետևյալ կերպ. այն «ջնջում է» մեկական նիշ տրված բառի յուրաքանչյուր ծայրից, աստիճանաբար նվազեցնելով x - ն ու y - ը: Եթե սկզբում վերջանում են ձախակողմյան 1 - երը, ապա ժապավենի վրա ամեն ինչ «ջնջվում է», գրվում է 1, և աշխատանքն ավարտվում է: Հակառակ դեպքում ժապավենի վրա մնում են $x-y-1$ հատ 1 - եր և * - ը, որոնք մեքենան ձևափոխում է $x-y$ - ի կոդի և կանգ առնում: Այս մեքենայի ուրվապատկերը ներկայացնենք ստորև.



Խնդիրներ

Կառուցել հետևյալ թվաբանական ֆունկցիան հաշվող Թյուրինգի մեքենա.

1. $f(x, y) = x + y$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$
3. $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$
4. $f(x) = \frac{x}{2}$
5. $f(x) = \left[\frac{x}{3}\right]$
6. $f(x) = \frac{x}{3}$
7. $f(x) = rm(x,2)$
8. $f(x) = rm(x,3)$
9. $f(x, y) = x - y$
10. $f(x, y) = x \cdot y$
11. $f(x, y) = rm(x, y)$
12. $f(x, y) = \frac{x}{y}$
13. $f(x) = x + 5$
14. $f(x, y) = x + y + 5$
15. $f(x) = x \dot{-} 4$
16. $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ եթե } x \geq 3 \\ x \dot{-} 1, \text{ եթե } x < 3 \end{cases}$

17. $f(x,y)=\begin{cases} x+y, \text{ եթե } x\geq 2 \\ x, \text{ եթե } x<2 \end{cases}$

18. $f(x,y)=\begin{cases} x+y+2, \text{ եթե } x\geq 3 \\ y, \text{ եթե } x<3 \end{cases}$

19. $f(x,y)=\begin{cases} x+y+1, \text{ եթե } x\geq 2 \text{ և } y>1 \\ 0, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases} x+3, \text{ եթե } rm(x,2)=0 \text{ և } rm(x,3)\neq 0 \\ 0, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

21. $f(x,y)=\begin{cases} x+y, \text{ եթե } rm(x,2)=0 \text{ և } rm(x,3)=1 \\ 1, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

22. $f(x,y)=\begin{cases} x, \text{ եթե } x \text{ զույգ է և } rm(y,3)=0 \\ 0, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

23. $f(x,y)=\begin{cases} x, \text{ եթե } x\geq y \\ y, \text{ եթե } x<y \end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases} x+3, \text{ եթե } x\leq 2 \\ x\dot{-}1, \text{ եթե } x>2 \end{cases}$

25. $f(x,y)=\begin{cases} x+2, \text{ եթե } y\leq 3 \\ y\dot{-}1, \text{ եթե } y\geq 4 \end{cases}$

26. $f(x,y)=\begin{cases} x\dot{-}2, \text{ եթե } x\geq 4 \\ x+1, \text{ եթե } x\leq 3 \end{cases}$

27. $f(x,y)=\begin{cases} x+2, \text{ եթե } \exists k(x=2k) \\ x\dot{-}2, \text{ եթե } \exists k(x=2k+1) \end{cases}$

28. $f(x,y)=\begin{cases} x+y, \text{ եթե } x\geq y \text{ և } rm(y,3)=1 \\ 0, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

29. $f(x,y)=\begin{cases} x\dot{-}1, \text{ եթե } x \text{ կենտ է} \\ x+1, \text{ եթե } x \text{ զույգ է} \end{cases}$

30. $f(x,y)=\begin{cases} x\dot{-}2, \text{ եթե } rm(x,2)=1 \text{ և } rm(x,3)=3 \\ y\dot{-}3, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

31. $f(x,y)=\begin{cases} (x+y)\dot{-}3, \text{ եթե } rm(x,2)=0 \text{ և } rm(y,3)=0 \\ y+1, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

32. $f(x,y)=\begin{cases} x+(y\dot{-}2), \text{ եթե } rm(x,2)=0 \text{ և } rm(x,3)=1 \\ 0, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

33. $f(x,y)=\begin{cases} x+y, \text{ եթե } rm(x,2)=1 \text{ և } rm(x,3)=2 \\ x\dot{-}4, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

34. $f(x,y)=\begin{cases} x+(y\dot{-}2), \text{ եթե } y\geq x+2 \\ 2, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

35. $f(x,y)=\begin{cases} x+y+2, \text{ եթե } x=2k \text{ և } y\neq 0 \\ x+5, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

36. $f(x,y)=\begin{cases} (x+y)\dot{-}1, \text{ եթե } y\geq x+2 \\ x, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

37. $f(x,y)=\begin{cases} x+y+2, \text{ եթե } \exists k\ (x=2k) \text{ և } y\neq 0 \\ x+5, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

38. $f(x,y)=(x\dot{-}y)+7$

39. $f(x,y)=\begin{cases} (x\dot{-}y)+8, \text{ եթե } x\geq y \\ x+y+8, \text{ եթե } x<y \end{cases}$

40. $f(x,y)=\begin{cases} x+y, \text{ եթե } rm(x+y,2)=0 \\ |x-y|, \text{ եթե } rm(x+y,2)=1 \end{cases}$

41. $f(x,y)=\max(x,y)$

42. $f(x, y) = \max(x, y, z)$

43. $f(x, y, z) = \min(x, y, z)$

44. $f(x, y) = 3 \cdot x$

45. $f(x, y) = 2 \cdot x + y$

46. $f(x, y) = x + 3y + 3$

47. $f(x, y) = \begin{cases} \left[\dfrac{x}{y}\right], \text{եթե}\, y \neq 0 \\ 0, \text{եթե}\ y = 0 \end{cases}$

48. $f(x, y) = \begin{cases} \left[\dfrac{x}{2}\right], \text{եթե}\ rm(x,2) = 0 \\ 2 + y, \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$

49. $f(x, y) = (x \dot{-} y) + 2x$

50. $f(x, y) = (x + y)^2$

51. $f(x, y) = x^2 + y$

52. $f(x, y) = \begin{cases} \left[\dfrac{x}{3}\right], \text{եթե}\, x > y \\ y + 3, \text{եթե}\ x \leq y \end{cases}$

53. $f(x, y) = \begin{cases} \left[\dfrac{x}{2}\right], \text{եթե}\ x > y \\ 0, \text{եթե}\ x \leq y \end{cases}$

54. $f(x, y) = \begin{cases} (2x \dot{-} 1) + y, \text{եթե}\ rm(x,3) = 2 \\ 0, \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$

55. $f(x, y) = \begin{cases} 2x, \text{եթե}\ rm(x,2) = 0\ \text{և}\ rm(y,4) > 1 \\ 0, \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$

56. $f(x,y)=\begin{cases}\left[\dfrac{x}{3}\right], \text{եթե } rm(x,2)=1\\ y+1, \text{հակառակ դեպքում}\end{cases}$

57. $f(x,y)=\begin{cases}2x\dot{-}1, \text{ եթե } rm(x,y)=0\\ x+y, \text{հակառակ դեպքում}\end{cases}$

58. $f(x,y)=\begin{cases}2x, \text{եթե } rm(x,2)=0\\ y\dot{-}1, \text{հակառակ դեպքում}\end{cases}$

59. $f(x,y)=\begin{cases}2x, \text{եթե } x\geq y+1\\ y\dot{-}1, \text{եթե } x<y+1\end{cases}$

60. $f(x,y)=\begin{cases}2y, \text{եթե } rm(x,2)=0 \text{ և } rm(y,4)>1\\ 1, \text{հակառակ դեպքում}\end{cases}$

61. $f(x)=\begin{cases}3x, \text{եթե } rm(x,2)=0\\ x\dot{-}1, \text{եթե } rm(x,2)\neq 0\end{cases}$

62. $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{x}{2}\right], \text{եթե } \exists\, k, \text{որ } x=2k\\ 0, \text{եթե } \exists\, k, \text{որ } x=2k+1\end{cases}$

63. $f(x,y)=\begin{cases}x+y, \text{եթե } rm(x,3)=0\\ x\cdot y, \text{հակառակ դեպքում}\end{cases}$

64. $f(x,y)=\left[\dfrac{x+y}{2}\right]$

65. $f(x,y)=\begin{cases}2y+1, \text{եթե} 2\leq x\leq 4\\ 1, \text{հակառակ դեպքում}\end{cases}$

66. $f(x)=\begin{cases}3x, \text{եթե } \exists\, k, \text{որ } x=2k+1\\ x\dot{-}7, \text{եթե } \exists\, k, \text{որ } x=2k\end{cases}$

67. $f(x)=\begin{cases}2x, \text{ եթե } x<y\\ x\dot{-}y, \text{ եթե } x\geq y\end{cases}$

68. $f(x,y)=\begin{cases}\left[\dfrac{x+y}{2}\right], \text{ եթե } rm(x,2)=0\\ 0, \text{ հակառակ դեպքում}\end{cases}$

69. $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ եթե } x \text{ զույգ է}\\ 2x, \text{ եթե } x \text{ կենտ է}\end{cases}$

70. $f(x,y)=\begin{cases}x\cdot y, \text{ եթե } x \text{ զույգ է}\\ x\dot{-}y, \text{ եթե } x \text{ կենտ է}\end{cases}$

71. $f(x)=\begin{cases}2x, \text{ եթե } rm(x,3)=0\\ \left[\dfrac{x}{3}\right], \text{ եթե } rm(x,3)=1\\ x\dot{-}3, \text{ եթե } rm(x,3)=2\end{cases}$

72. $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ եթե } x \text{ զույգ է}\\ x(x\dot{-}1), \text{ եթե } x \text{ կենտ է}\end{cases}$

73. $f(x)=\begin{cases}x+3, \text{ եթե } x \text{ զույգ է}\\ \left[\dfrac{x}{3}\right], \text{ եթե } x \text{ կենտ է}\end{cases}$

74. $f(x,y)=\begin{cases}(x+1)^2, \text{ եթե } rm(x,3)=1 \text{ և } x<y\\ 3y, \text{ հակառակ դեպքում}\end{cases}$

75. $f(x,y)=\begin{cases}x\cdot y, \text{ եթե } x=5 \text{ և } y>3\\ 5, \text{ եթե } x<5 \text{ և } y=3\\ x\dot{-}y, \text{ եթե } x>5 \text{ և } y<3\end{cases}$

76. $f(x,y)=\begin{cases}\left[\dfrac{x}{3}\right], \text{ եթե } x>4 \text{ և } x \text{ զույգ է}\\ 2x\dot{-}1, \text{ հակառակ դեպքում}\end{cases}$

77. $f(x,y)=\begin{cases}(x+7)^2, \text{ եթե } rm(x,4)=1\\ 3, \text{ հակառակ դեպքում}\end{cases}$

78. $f(x,y)=\begin{cases}(x+2)^2\dot{-}y, \text{ եթե } x\geq y \text{ և } x \text{ զույգ է}\\ y, \text{ հակառակ դեպքում}\end{cases}$

79. $f(x,y)=\begin{cases}\left[\dfrac{x}{y}\right], \text{ եթե } x \text{ զույգ է և } y\neq 0\\ y\dot{-}5, \text{ եթե } y>6 \text{ և } x \text{ կենտ է}\\ x+1, \text{ հակառակ դեպքում}\end{cases}$

80. $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^2, \text{ եթե } x<y \text{ և } rm(y,3)=2\\ 3, \text{ հակառակ դեպքում}\end{cases}$

81. $f(x,y)=\begin{cases}(x\dot{-}2)\dot{-}y, \text{ եթե } x>y \text{ և } x>10\\ 2x, \text{ եթե } x=y\\ 4, \text{ հակառակ դեպքում}\end{cases}$

82. $f(x,y)=\begin{cases}x(x\dot{-}2), \text{ եթե } rm(y+1,2)=1 \text{ և } x \text{ զույգ է}\\ x+5, \text{ հակառակ դեպքում}\end{cases}$ ։

Կառուցել Թյուրինգի մեքենա, որը $\forall x\in N$-ի համար իրականացնում է մեքենայական կոդի հետևյալ ձևափոխությունները.

83. $k(x)\to k(2)*k(0)*k(x\dot{-}1)$

84. $k(x)\to k(2)*k(x\dot{-}2)$

85. $k(x)\to k(x\dot{-}2)*k(1)$

86. $k(x)\to k(x\dot{-}1)*k(0)*k(1)$

87. $k(x)\to k(0)*k(x\dot{-}1)*k(2)$

88. $k(x) \to k(0) * k(x \dot{-} 1) * k(3)$

89. $k(x) \to k(x+2) * k(1) * k(x)$

90. $k(x) \to k(x+1) * k(1) * k(x \dot{-} 1)$

91. $k(x) \to k(5) * k(x+3) * k(x \dot{-} 1)$

92. $k(x) \to k(2x) * k(x+2)$

93. $k(x) \to k(x+1) * k(x) * k(x \dot{-} 1)$

94. $k(x) \to k(x) * k(x) * k(x \dot{-} 2)$

95. $k(x) \to k(x) * k(x \dot{-} 1) * k(x)$

96. $k(x) \to k(0) * k(x) * k(0) * k(x+1)$

97. $k(x) \to k(x \dot{-} 3) * k(0) * k(x+2)$

98. $k(x) \to k(x \dot{-} 1) * k(x) * k(x+1)$

99. $k(x) \to k(1) * k(x \dot{-} 1) * k(x+1)$

100. $k(x) \to k(x \dot{-} 2) * k(0) * k(rm(x,3))$

101. $k(x) \to k(x) * k\left[\frac{x}{2}\right] * k(x)$

102. $k(x) \to k\left[\frac{x}{2}\right] * k(x+1) * k(rm(x,3))$

103. $k(x) \to k\left[\frac{x}{2}\right] * k(1) * k(x \dot{-} 1)$

104. $k(x) \begin{cases} k(0) * k(x \dot{-} 1), \text{ եթե } rm(x,3) = 0 \\ k(2x), \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

105. $k(x) \begin{cases} k(x \dot{-} 1) * k(x \dot{-} 1), \text{ եթե } x > 4 \\ k(1) * k(2), \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

106. $k(x) \begin{cases} k(x) * k(x \dot{-} 2), \text{ եթե } rm(x,3) \neq 0 \\ k(0), \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

107. $k(x) \begin{cases} k(4)*k(3x)*k(2), & \text{եթե } x \text{ զույգ է} \\ k(x), & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$

108. $k(x) \begin{cases} k(x \dot{-} 2)*k(x), & \text{եթե } x=5 \\ k(2x), & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$

109. $k(x) \begin{cases} k\left[\frac{x}{3}\right]*k(0)*k(x), & \text{եթե } rm(x,4)>2 \\ k(x)*k(1), & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$

110. $k(x) \begin{cases} k(x^2), & \text{եթե } rm(x,3)=0 \\ k(x \dot{-} 4)*k(2x), & \text{եթե } rm(x,3)=2 \\ k(2x), & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$

111. $k(x) \begin{cases} k(x \dot{-} 2)*k(1), & \text{եթե } x \geq 3 \\ k(2x), & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$

112. $k(x) \begin{cases} k(2)*k(1)*k(x \dot{-} 1), & \text{եթե } x \geq 6 \\ k(x), & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$

113. $k(x) \begin{cases} k(2x)*k(2), & \text{եթե } rm(x,2)=1 \\ k(x \dot{-} 1), & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$

114. $k(x) \begin{cases} k(2x)*k(0)*k(1), & \text{եթե } rm(x,3)=2 \\ k(2), & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$

3. ԲՆԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԱՐԱԿԱԼՈՒՄՆԵՐ

Յուրաքանչյուր սևեռված n բնական թվի համար N^n-ից N-ի վրա փոխմիարժեք արտապատկերումը կոչվում է բնական թվերի պարզ համարակալում: Կանտորի կողմից ներմուծվել է համարակալումը հետևյալ եղանակով`

$n = 2$ դեպքում $C(x, y) = \dfrac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + x$ ֆունկցիան

գտնում է յուրաքանչյուր (x, y) զույգի համարը, իսկ $r(m)$ և $l(m)$ ֆունկցիաները (տես [1]) վերականգնում են m համար ունեցող զույգի աջ` $y$, և ձախ` x, անդամները: Ակնհայտ է, որ $C(l(m), r(m)) = m$ և $r(C(x, y)) = y$, $l(C(x, y)) = x$:

$n \geq 3$ համար մակածման եղանակով ներմուծվում է

$$C^n(x_1,...,x_n) = C(C^{n-1}(x_1,...,x_{n-1}), x_n)$$

ֆունկցիան, որի միջոցով համարակալվում են բնական թվերի n-յակները:

Համապատասխանաբար $æ_i^n(m)$ $1 \leq i \leq n$ (տես [1]) ֆունկցիաների միջոցով ըստ n-յակի m Կանտորյան համարի վերականգնվում է նրա i-րդ անդամը:

Ներմուծենք հետևյալ նշանակումները` $N^0 = \{\Lambda\}$, $N^1 = N$ և $N^\infty = N^0 \cup N^1 \cup N^2 \cup \ldots \cup N^n \cup \ldots$: $N^\infty$-ից $N$-ի վրա փոխմիարժեք արտապատկերումը ներմուծվել է Գյոդելի կողմից հետևյալ եղանակով`

$$\beta(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 0, \text{եթե } n = 0 \\ C(n \dot{-} 1, C^n(x_1,...,x_n)) + 1, \text{եթե } n \geq 1 \end{cases}:$$

Գյոդելյան համարակալումների հետ կապված դիտարկվում են հետևյալ ֆունկցիաները`

• $\rho(x) =$ «մեկ հատ x-ից բաղկացած համակարգի գյոդելյան համարին»

• $\delta(z) =$ «z գյոդելյան համար ունեցող համակարգի երկարությանը»

- $\lambda(i,z)=\begin{cases} \text{« } z \text{ գյոդելյան համար ունեցող համակարգի} \\ \quad i \text{ - րդ անդամին », եթե } 1 \le i \le \delta(z) \\ 0, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

- $\varphi(x,y)=$ «այն համակարգի գյոդելյան համարին, որը ստացվում է y բնական թիվը աջից կցագրելով x գյոդելյան համար ունեցող համակարգին»

- $\psi(x,y)=$ «այն համակարգի գյոդելյան համարին, որը ստացվում է y գյոդելյան համար ունեցող համակարգը աջից կցագրելով x գյոդելյան համար ունեցող համակարգին»

- $\theta(z,i,j)=\begin{cases} \text{« } z \text{ գյոդելյան համար ունեցող համակարգի } i \text{ - րդ} \\ \quad \text{անդամից սկսվող } j \text{ երկարությամբ հատվածի} \\ \quad \text{գյոդելյան համարին », եթե } i \ge 1 \text{ և } i+j-1 \le \delta(z) \\ 0, \text{ հակառակ դեպքում} \end{cases}$

- $\gamma(x,y)=$ « y հատ x - երից բաղկացած համակարգի գյոդելյան համարին»

Խնդիրներ

1. Ապացուցել $C(x,y)$ ֆունկցիայի պարզագույն կարգընթացությունը:

2. Ապացուցել, որ $C(x,y)$ ֆունկցիան փոխմիարժեք համապատասխանություն է N^2 և N միջև:

3. Ապացուցել $l(x)$ և $r(x)$ ֆունկցիաների պարզագույն կարգընթացությունը:

4. Ապացուցել $C^n(x_1,...,x_n)$ ֆունկցիայի պարզագույն կարգընթացությունը:

5. Ապացուցել, որ $C^n(x_1,...,x_n)$ ֆունկցիան փոխմիարժեք համապատասխանություն է N^n և N միջև:

6. Ապացուցել $æ_i^n(m)$ $i = 1,2,...n$ ֆունկցիաների պարզագույն կարգընթացությունը:

7. Ապացուցել $\rho(x)$, $\delta(z)$, $\lambda(i,z)$, $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$, $\theta(z,i,j)$ և $\gamma(x,y)$ ֆունկցիաների պարզագույն կարգընթացությունը:

Դիցուք $\beta(x_1,..,x_n) = m$: Հաշվել հետևյալ ֆունկցիաները և ապացուցել նրանց պարզագույն կարգընթացությունը`

8. $\beta(8,4,1,10)$

9. $\beta(8,x_8,4,x_4,1,x_1,10,x_{10})$

10. $\beta(x_1,x_2,...,x_{n-1},8,5)$

11. $\beta(x_1,3,x_2,1,x_4,x_5,...,x_n)$

12. $\beta(x_1,x_3,x_2,x_4,x_5,...,x_{n-1},1,x_n,2)$

13. $\beta(x_2,x_4,x_6,x_8,x_{10},x_1,x_3,x_5,x_7,x_9)$

14. $\beta(x_3,0,x_2,1,x_1,2,x_3,x_4,x_5,...,x_n)$

15. $\beta(x_1,3,x_2,1,x_6,x_7,...,x_n)$

16. $\beta(x_{n-1},x_n,x_1,x_2,...,x_{n-2})$

17. $\beta(x_2,x_1,x_4,x_3,x_5,x_6,x_7,x_8,...,x_{n-2},x_{n-1},x_n)$

18. $\beta(1,2,3,4,5,x_1,x_2,x_3,x_{n-1},x_n)$

19. $\beta(2,8,24,x_6,x_7,...,x_{n-1},x_n)$

20. $\beta(x_1,x_2,2,x_3,x_4,4,...,x_{n-1},x_n,n)$

21. $\beta(x_1,x_4,x_6,x_7,...,x_{n-1},1,x_n,2)$

22. $\beta\left(x_1,\underbrace{0,...,0}_{x_1},x_2,\underbrace{0,...,0}_{x_2},x_3,\underbrace{0,...,0}_{x_3},...,x_n,\underbrace{0,...,0}_{x_n}\right)$

23. $\beta\left(x_1,0,x_2,0,0,x_3,0,0,0,...,x_n,\underbrace{0,...,0}_{n}\right)$

24. $\beta(1,1,x_1,x_1,x_2,x_3,x_4,...,x_{n-1},x_n,x_n,2,2)$

25. $\beta(x_n, x_n, x_{n-1}, x_{n-1}, ..., x_1, x_1)$

26. $\beta(x_2, x_3, x_1, x_4, x_5, ..., x_{n-3}, x_n, x_{n-2}, x_{n-1})$

27. $\beta(0, x_1, x_2, ..., , x_{n-1}, x_n, 0)$

28. $\beta(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, x_5, x_6, x_7 ..., , x_{n-4}, x_1, x_2, x_3, x_4)$

29. $\beta(x_1, x_2, x_3, x_4, 5, 6, 7, 8, x_9, x_{10}, ..., x_n)$

30. $\beta(x_1, x_2, 0, 0, 0, x_3, x_4, x_5, x_6, ..., x_{n-3}, x_{n-2}, 0, 0, 0, x_{n-1}, x_n)$

31. $\beta(x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, ..., x_n, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

32. $\beta(x_1, x_2, x_3, x_4, 0, 0, 0, x_5, x_6, 0, 0, 0, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11} ..., x_n)$

Ապացուցել հետևյալ ֆունկցիաների պարզագույն կարգընթացու-թյունը՝

33. $f(m) =$ « m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի m-ից մեծ զույգ անդամների քանակին»:

34. $f(m) =$ « m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի պարզ անդամների քանակին»:

35. $f(m) =$ « m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի 5-ից մեծ պարզ և կենտ անդամների քանակին»:

36. $f(m, x) =$ « m գյոդելյան համար ունեցող համակարգում զույգ տեղերում գտնվող x-ից մեծ կենտ թվերի քանակին»:

37. $f(m) =$ « m գյոդելյան համար ունեցող համակարգում կենտ տեղերում գտնվող 15-ից փոքր զույգ թվերի քանակին»:

38. $f(m, i, j) =$ « m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի i-րդ և j-րդ անդամների m-ից մեծ ընդհանուր պարզ բաժանարարների քանակին»:

39. $f(m, i) =$ « m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի վերջին անդամից մինչև i-րդ անդամը ներառյալ անդամների ամենափոքր ընդհանուր բազմապատիկին»:

40. $f(m) =$ « m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի 5-ի վրա բաժանվող զույգ անդամների գումարին»:

41. $f(m) =$ « m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի կենտ տեղերում գտնվող 3-ի վրա բաժանվող զույգ անդամների գումարին»:

42. $f(m,x) =$ «m գյոդելյան համար ունեցող համակարգում կենտ տեղերում գտնվող x-ի վրա բաժանվող զույգ թվերի գումարին»:

43. $f(m) =$ «m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի 3-ի և 7-ի վրա բաժանվող անդամների գումարին»:

44. $f(m) =$ «m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի զույգ անդամների կենտ բաժանարարների գումարին»:

45. $f(m) =$ «m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի զույգ տեղերում գտնվող 4-ի վրա բաժանվող անդամներից բաղկացած համակարգի գյոդելյան համարին»:

46. $f(m) =$ «m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի 3-ի վրա բաժանվող տեղերում գտնվող անդամներից բաղկացած համակարգի գյոդելյան համարին»:

47. $f(m) =$ «m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի 4-ի վրա բաժանվող զույգ անդամների արտադրյալին»:

48. $f(m) =$ «m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի $\delta(m)$-ը չգերազանցող կենտ անդամների արտադրյալին»:

49. $f(m) =$ «m գյոդելյան համար ունեցող համակարգում կենտ տեղերում գտնվող զույգ թվերի արտադրյալին»:

50. $f(m) =$ «m գյոդելյան համար ունեցող համակարգում կենտ տեղերում գտնվող 3-ից մեծ թվերի արտադրյալին»:

51. $f(m) =$ «m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի 3-րդից նախավերջին 5-ից մեծ անդամների արտադրյալին»:

52. $f(x,y) =$ «այն համակարգի գյոդելյան համարին, որը ստացվում է x գյոդելյան համար ունեցող համակարգի յուրաքանչյուր անդամից հետո ավելացնելով y թիվը»:

53. $f(x,y) =$ «այն համակարգի գյոդելյան համարին, որը ստացվում է x գյոդելյան համար ունեցող համակարգին աջից և ձախից կցագրելով y թիվը»:

54. $f(m,i) =$ «այն համակարգի գյոդելյան համարին, որը ստացվում է m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի i-րդ անդամի ամենամեծ պարզ բաժանարարին աջից կցագրելով m թիվը»:

55. $f(m,i) =$ «m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի i-րդ անդամի ամենամեծ պարզ բաժանարարի համարից կազմված համակարգի գյոդելյան համարին»:

56. $f(m,i) =$ «այն համակարգի գյոդելյան համարին, որը ստացվում է m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի i-րդ անդամից հետո ավելացնելով i-րդ պարզ թիվը»:

57. $f(m) =$ «այն համակարգի գյոդելյան համարին, որը ստացվում է m գյոդելյան համար ունեցող համակարգից ընտրելով այն անդամները, որոնց համարները բաժանվում են 3-ի վրա»:

58. $f(m,i) =$ «m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի 4-ին պատիկ տեղերում և i-ն չգերազանցող անդամներից բաղկացած համակարգի գյոդելյան համարին»:

59. $f(m,i) =$ «այն համակարգի գյոդելյան համարին, որը ստացվում է m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի նախավերջին անդամից սկսած ընտրելով i երկարությամբ (դեպի ձախ) հատված»:

60. $f(m) =$ «m գյոդելյան համար ունեցող համակարգի զույգ և 3-ին պատիկ տեղերում գտնվող անդամներից բաղկացած համակարգի գյոդելյան համարին»:

61. $f(x,y,i) =$ «այն համակարգի գյոդելյան համարին, որը ստացվում է x գյոդելյան համար ունեցող համակարգի i-րդ անդամից հետո ավելացնելով y թիվը»:

62. $f(x,y) =$ «այն համակարգի գյոդելյան համարին, որը ստացվում է x գյոդելյան համար ունեցող համակարգից ձախից՝ կցագրելով y գյոդելյան համար ունեցող համակարգը, իսկ աջից կցագրելով x հատ 1»:

63. $f(x,i) =$ «այն համակարգի գյոդելյան համարին, որը ստացվում է x գյոդելյան համար ունեցող համակարգի i-րդ անդամից առաջ ավելացնելով x հատ x, իսկ i-րդ անդամից հետո կցագրելով մնացած անդամները հակառակ կարգով»:

64. $f(x,y) =$ «այն համակարգի գյոդելյան համարին, որը ստացվում է y գյոդելյան համար ունեցող համակարգից ընտրելով x-ին պատիկ անդամները՝ սկսելով y գյոդելյան համար ունեցող համակարգի վերջից»:

4. ՀԱՄԱՊԻՏԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

Դիցուք $M \subseteq \mathfrak{F}^n$: $F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ ֆունկցիան կոչվում է համապիտանի M բազմության համար, եթե

$\forall f(x_1,\ldots x_n) \in M \ \exists n_f \in N \ (F(n_f, x_1, \ldots x_n) \simeq f(x_1, \ldots x_n))$

$\forall m \in N \ (F(m, x_1, \ldots x_n) \in M)$:

Օրինակ՝

$M = \left\{ x + y^2, x^3, 2xy \right\}$ բազմության համար համապիտանի են հանդիսանում հետևյալ ֆունկցիաները՝

ա) $F(x_0, x, y) = (x + y^2)\overline{sg}(x_0) + x^3\,\overline{sg}|x_0 - 1| + 2xysg(x_0 \dot{-} 1)$,

բ) $F(x_0, x, y) = (x + y^2)\overline{sg}(rm(x_0, 3)) + x^3\,\overline{sg}|rm(x_0, 3) - 1| +$

$+ x^3\,\overline{sg}|rm(x_0, 3) - 1| + 2xy\overline{sg}|rm(x_0, 3) - 2|$:

$M = \left\{ x^y, x + 2y \right\} \cup \left\{ x^k \cdot y^m / k, m \in N \right\}$ բազմության համար համապիտանի է, օրինակ, հետևյալ ֆունկցիան՝

$F(x_0, x, y) = x^y\,\overline{sg}(x_0) + (x + 2y)^3\,\overline{sg}|x_0 - 1| + x^{r(x_0 \dot{-} 2)} y^{l(x_0 \dot{-} 2)} sg(x_0 \dot{-} 1)$:

Խնդիրներ

Նշված բազմությունների համար կառուցել համապիտանի ֆունկցիա և ապացուցել նրա պարզագույն կարգընթացությունը:

1. $M = \left\{ 2x, x^3, x + x^2 \right\}$
2. $M = \left\{ x^3, x^2 + y^2, x^4 \dot{-} 1 \right\}$
3. $M = \left\{ x + y, x \dot{-} y, x^y, rm(x, y) \right\}$
4. $M = \left\{ x + y, x \dot{-} 6z, x^{y+1}, 5z, 2y \right\}$
5. $M = \left\{ x \cdot y, x \dot{-} y, rm(x, y), \left[\dfrac{x}{y} \right] \right\}$
6. $M = \left\{ x!, x^2 + y, 2x, x^y \right\}$

7. $M=\left\{\ x^2+y^2, x\dot{-}y, z+y, \left[\frac{x}{y}\right]\right\}$

8. $M=\left\{x^2, y^2, x+1, y+2\right\}$

9. $M=\left\{x^3, y^5, x^2+y^2, x\dot{-}y\right\}$

10. $M=\left\{x\dot{-}y, \left[\frac{x}{y}\right], x^3, y+2, \left[\sqrt{y}\right]\right\}$

11. $M=\left\{\ x^3, x\dot{-}3y, x+7^y, \left[\frac{x}{y\dot{-}1}\right]\right\}$

12. $M=\left\{\ 2^x, \left[\frac{y}{x}\right], y, x+5y, y+7x\right\}$

13. $M=\left\{7y, x^5, x^{y+1}, x\dot{-}3y, x+6y\right\}$

14. $M=\left\{\ x\dot{-}\left[\frac{x}{y}\right], x+x^y, \left[\frac{y}{5}\right], x+10, x^2\ \right\}$

15. $M=\left\{x+3y, x\dot{-}6y, x^{y+1}, 5x, 2y\right\}$

16. $M=\left\{\ x\dot{-}y, x\cdot y, \left[\frac{x\dot{-}3}{7\dot{-}y}\right], x+y\right\}$

17. $M=\left\{\ rest(x,y), \left[\frac{x}{ky}\right] / k=0,1,2\right\}$

18. $M=\left\{\ x\dot{-}y, z\dot{-}c / c=1,2\right\}$

19. $M=\left\{\ 1\dot{-}x, \left[\frac{y+3}{x\dot{-}1}\right], xl / l=7,8\right\}$

20. $M=\left\{\ 5\dot{-}l / l=1,2,3\right\}\cup\left\{\ x+y\right\}$

21. $M=\left\{\ r\dot{-}3 / r=1,3,5\right\}\cup\left\{\ 2x\right\}$

22. $M=\left\{\ xl, k+y / l=1,2; k=3,4\right\}$

23. $M=\left\{\ xr, b+cy / r=2,3; b=0,1; c=8,9\right\}$

24. $M=\{x+y, k\cdot x\cdot y, l(x\dot{-}y)/k=0,1,2; l=3,4\}$

25. $M=\{x\dot{-}y, x+k\cdot y, y^{lz}/k=0,1,2; l=5,6,7\}$

26. $M=\{x^2, y^3, a(x+y), x^y/a>3\}$

27. $M=\{x^y, x\cdot y\}\cup\{ax^2+y/a\in N\}$

28. $M=\{ax^2/a\geq 3\}\cup\{y, x\cdot y\}$

29. $M=\{x+by/b\in N\}\cup\{x.y, x^y\}$

30. $M=\{x\dot{-}3yz, y^{kz}/k\in N\}$

31. $M=\{3x, x+1\}\cup\{x\cdot 2y/y\in N\}$

32. $M=\{x+y, x\cdot y\}\cup\{x+k\cdot z/k\in N\}$

33. $M=\{7y, x+6z, y^{3z}, k\cdot x\cdot y/k\in N\}$

34. $M=\{c\cdot x\cdot y/c\in N\}\cup\left\{x+y, \left[\frac{x}{x\dot{-}y}\right]\right\}$

35. $M=\{x+2y/y\in N\}\cup\{x^2, x^5\}$

36. $M=\{c\cdot 2^x/c\in N\}\cup\{x\dot{-}2^{10}, x+7\}$

37. $M=\{x\cdot y, y^z, x+k\cdot y/k\in N\}$

38. $M=\{x+3y, x+4y, rm(kx, y)/k\in N\}$

39. $M=\{rm(x, y), k\cdot z/k\in N\}$

40. $M=\{x\dot{-}y, x+3z, k\cdot x\cdot z/k\in N\}$

41. $M=\{x, 3x\}\cup\{x\cdot 3^{cy}/c\in N\}$

42. $M=\{x+(3y)^c/c\in N\}\cup\{x+1, x^3\}$

43. $M=\{x\dot{-}7, x+2^{10}\}\cup\{2^c\cdot x/c\in N\}$

44. $M=\{x^7, 2x\}\cup\{x+3y/y\in N\}$

45. $M=\{x+y, x\cdot y\}\cup\{x+ky/k\in N\}$

46. $M=\{x^2, rm(x, y)\}\cup\{x^i/i=1,3,5,\ldots\}$

47. $M=\{kxy, l(x+y)/k=3,4; l\in N\}$

48. $M = \left\{ \left\lfloor \sqrt[y]{kx} \right\rfloor, rm(ly, x) / k, l \in N \right\}$

49. $M = \left\{ x^y, x + y, \left[\dfrac{x}{y} \right] \right\} \cup \left\{ x^a + y^b / a, b \in N \right\}$

50. $M = \{ a \cdot x + by / a = 1,3,5,\ldots; b = 0,2,4,\ldots \}$

51. $M = \left\{ x^i / i = 0,2,4,\ldots \right\} \cup \left\{ y^j / j \geq 3 \right\}$

52. $M = \{ a \cdot x / a > 3 \} \cup \{ by / b > 4 \}$

53. $M = \{ c_1 \cdot x + c_2 \cdot y / c_1, c_2 \in N \}$

54. $M = \{ xy, cy + z, x + lz / c, l \in N \}$

55. $M = \{ lx / l \in N \} \cup \{ y \dot{-} n / n \in N \}$

56. $M = \{ x \dot{-} k \cdot y, l \cdot y \cdot z / l = 0,1,2; k \in N \}$

57. $M = \{ x, k \cdot y, l(z + y) / k, l \in N \}$

58. $M = \{ k \cdot x \cdot y, l(z + v) / k \in N, l = 1,2,3 \}$

59. $M = \{ y \dot{-} l / l = 1,5,8 \} \cup \{ x + 2k / k = 0,2,4,\ldots \}$

60. $M = \{ a + bx / a, b \in N \}$

61. $M = \left\{ ax + y^k / a, k \in N \right\}$

62. $M = \left\{ a \cdot x^b / a, b \in N, a \geq \left[\dfrac{b}{2} \right] \right\}$

63. $M = \left\{ x^i / i \in N, rm(i,5) = 0 \right\}$

64. $M = \left\{ x^{y^i} / rm(i,2) = 0 \right\} \cup \left\{ y^{x^j} / j \in N \right\}$

65. $M = \left\{ x^i / i \in N, rm(i,2) = 0 \right\} \cup \left\{ y^j / j \geq 2 \right\}$

66. $M = \left\{ x^a / a \in N \right\} \cup \{ x \cdot i / rm(i,4) = 0, i \in N \}$

67. $M = \left\{ \left(x^i \right)^j / i, j \in N, rm(i,3) = 0, rm(j,2) = 0 \right\}$

68. $M = \left\{ x + y, x^2 \right\} \cup \left\{ x^i, y^i / i, j \in N, i \geq 2 \right\}$

69. $M = \left\{ x \cdot y^i / rm(i,3) = 2 \right\} \cup \left\{ a^{x+y} / rm(a,2) = 0 \text{ и } a > 7 \right\}$

70. $M = \{ a \cdot x + b \cdot y, l \cdot z / a, b, l \in N \}$

71. $M = \{ a\cdot x + b\cdot y / a,b \in N\} \cup \{ c^z / c \in N\}$

72. $M = \{ kx + y, lxz, p(y \dot{-} z) / k,l,p \in N\}$

73. $M = \{ x + y, x \dot{-} ky, l\cdot x\cdot y, (m\cdot x)^y / k,l,m \in N\}$

74. $M = \{ ax + by + cz / a,b,c \in N\}$

75. $M = \{ x + k, ly, z^m / l,k,m \in N\}$

76. $M = \{ a\cdot x + b\cdot y / a,b \in N\} \cup \{ x^i + y^j / i, j \in N\}$

77. $M = \{ x, y\} \cup \{ x^i, y^j / i = 0,2,4,\ldots; y = 1,3,5,\ldots\} \cup$
$\cup \{ a\cdot x + b\cdot y / a,b \in N\}$

5. ՃԱՆԱՉԵԼԻ ԵՎ ԿԻՍԱՃԱՆԱՉԵԼԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Դիցուք $M \subseteq N$: M բազմության բնութագրիչ ֆունկցիան սահմանվում է հետևյալ եղանակով.

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1, \text{ եթե } x \in M \\ 0, \text{ եթե } x \notin M \end{cases},$$

կիսաբնութագրիչ ֆունկցիան` հետևյալ կերպ.

$$\tilde{\chi}_M(x) = \begin{cases} 1, \text{ եթե } x \in M \\ !, \text{ եթե } x \notin M \end{cases}:$$

M բազմությունը կոչվում է *ճանաչելի*, եթե նրա բնութագրիչ ֆունկցիան կարգընթաց է:

M բազմությունը կոչվում է *կիսաճանաչելի*, եթե տեղի ունի հետևյալ պայմաններից որևէ մեկը`

1. $\tilde{\chi}_M(x)$ մասնակի կարգընթաց ֆունկցիա է;

2. Գոյություն ունի $f(x)$ մասնակի կարգընթաց ֆունկցիա, այնպիսին, որ $M = \{x/!f(x)\}$;

3. Գոյություն ունի $f(a,x)$ պարզագույն կարգընթաց ֆունկցիա, այնպիսին, որ $M = \{a/\exists\ x\ f(a,x) = 0\}$;

4. Գոյություն ունի $F(a, x_1, ..., x_n)$ պարզագույն կարգընթաց ֆունկցիա, այնպիսին, որ $M = \{a / \exists\ x_1, ..., x_n\ \ F(a, x_1, ..., x_n) = 0\}$;

5. Գոյություն ունի $f(x)$ մասնակի կարգընթաց ֆունկցիա, այնպիսին, որ $M = \{y / \exists\ x\ \ f(x) = y\}$;

6. Եթե $M-$ը դատարկ չէ, ապա գոյություն ունի $f(x)$ պարզագույն կարգընթաց ֆունկցիա, այնպիսին, որ $M = \{y / \exists\ x\ \ f(x) = y\}$;

7. Եթե $M-$ը անվերջ է, ապա գոյություն ունի $g(x)$ ընդհանուր կարգընթաց ֆունկցիա, այնպիսին, որ $M = \{y / \exists\ x\ \ g(x) = y\}$ և եթե $x_1 \neq x_2$, ապա $g(x_1) \neq g(x_2)$:

Դիցուք $M \subseteq N^n$: M բազմությունը կոչվում է ճանաչելի (կիսաճանաչելի), եթե ճանաչելի (կիսաճանաչելի) է

$$M' = \{C^n(x_1, ..., x_n) / (x_1, ..., x_n) \in \mathrm{M}\}$$ բազմությունը:

Ճանաչելի և կիսաճանաչելի բազմությունների հիմնական հատկությունները

1. Ճանաչելի բազմության լրացումը ճանաչելի է:

2. Երկու ճանաչելի (կիսաճանաչելի) բազմությունների միավորումն ու հատումը ճանաչելի (կիսաճանաչելի) է:

3. Կիսաճանաչելի բազմության լրացումը կիսաճանաչելի է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն (հետևաբար նաև նրա լրացումը) ճանաչելի է *(Պոստի թեորեմ)*:

Խնդիրներ

Ցույց տալ հետևյալ բազմությունների ճանաչելիությունը.

1. $M = \varnothing$
2. $M = N$
3. $M = \{3,9\}$
4. $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
5. $M = \{2k / k \in N\}$
6. $M = \{2k + 1 / k \in N\}$

7. $M = \{n/\ n$ - ը պարզ թիվ է$\}$

8. $M = \{n/\ n$ - ը կատարյալ թիվ է$\}$

9. $M = \{1,3\} \cup \{2k/k \in N\}$

10. $M = \{2,4\} \cup \{2k+1/k \in N\}$

11. $M = \{1,6\} \cup \{n/\ n$ -ը պարզ թիվ է$\}$

12. $M = \{n/\ n$ - ը պարզ թիվ է$\} \setminus \{2,5\}$

13. $M = \{2,6,10,14,...\}$

14. $M = \{3,7,17\}$

15. $M = \{3,6,9,...\}$

16. $M = \{1,11,111,...\}$

17. $M = \{1,31,331,...\}$

18. $M = \{x/rm(x,3) \neq 0$ և $rm(x,2) \neq 0\}$

19. $M = \{x/rm(x,2) = 0$ և $rm(x,6) \neq 0\}$

20. $M = \{x/x \geq 7$ և $\exists\, k\ \ x = 2k\}$

21. $M = \{x/\exists\, k\ \ x = 2^k\}$

22. $M = \{x/\exists\, k\ \ x = 3^k \cdot 5^k\}$

23. $M = \{x/\exists\, k \exists l\ \ x = 3^k \cdot 5^l\}$

24. $M = \{x/\exists\, k\ \ x = k^2\}$

25. $M = \{x/\exists\, k \exists l\ \ x = k^2 + l^2\}$

26. $M = \{x/\exists\, y\ \ \exists\, z\ \ y^2 + z^2 = x^2\}$

27. $M = \{x/x \geq 5$ և $\exists\, y,\ \ y = 3x + 1\}$

28. $M = \{C(x,y)/\exists\, k > 0\ \ x = y + k\}$

29. $M = \{(x,y)/x = 2y\}$

30. $M = \{(x,y)/x = y^2\}$

31. $M = \{(x,y)/\exists v\ x = 2^v\}$

32. $M = \{(x, y) / \exists v \; x > 2^v\}$

33. $M = \{(x, y) / \exists v \; x \geq 5 \cdot 3^v\}$

34. $M = \{(x, y) / x = 6 \cdot 3^{2y}\}$

35. $M = \{(x,y) / rm(x,2)=0$ և $rm(y,3)=0\}$

36. $M = \{(x,y) / rm(x,2)=0$ և y-ը պարզ է$\}$

37. $M = \{(x,y) / x \dot{-} 3^y > 2\}$

38. $M = \{(x,y) / \exists v \; x > 3^v$ և $y = 3 \cdot k\}$

39. $M = \left\{(x,y) / rm(x,2)=0 \right.$ և $\left. \exists \, t \;\; y=5^t \right\}$

40. $M = \{(x,y) / \exists k (x + y) = 3^k\}$

41. $M = \{(x, y) / \exists \, z \;\; (x < z < y$ և z - ը պարզ թիվ է$)\}$

42. $M = \{(x,y,t) / t > x \cdot 3^y\}$

43. $M = \{(x,y,z) / x = y \dot{-} 3z\}$

44. $M = \{C^3(x, y, z) / x = 3y + 5^z\}$

45. $M = \{C^3(x, y, z) / x = y + 2^z\}$

Ցույց տալ բազմության կիսաճանաչելիության սահմանումների համարժեքությունը.

46. Սահմանում 1 ↔ Սահմանում 2:

47. Սահմանում 1 ↔ Սահմանում 3:

48. Սահմանում 1 ↔ Սահմանում 4:

49. Սահմանում 1 ↔ Սահմանում 5:

50. Սահմանում 1 ↔ Սահմանում 6, եթե բազմությունը դատարկ չէ:

51. Սահմանում 1 ↔ Սահմանում 7, եթե բազմությունը անվերջ է:

52. Սահմանում 2 ↔ Սահմանում 3

53. Սահմանում 2 ↔ Սահմանում 4

54. Սահմանում 2 ↔ Սահմանում 5

55. Սահմանում 2 ↔ Սահմանում 6, եթե բազմությունը դատարկ չէ:

56. Սահմանում 2 ↔ Սահմանում 7, եթե բազմությունը անվերջ է:

57. Սահմանում 3 ↔ Սահմանում 4

58. Սահմանում 3 ↔ Սահմանում 5

59. Սահմանում 3 $\leftrightarrow$ Սահմանում 6, եթե բազմությունը դատարկ չէ:
60. Սահմանում 3 $\leftrightarrow$ Սահմանում 7, եթե բազմությունը անվերջ է:
61. Սահմանում 4 $\leftrightarrow$ Սահմանում 5
62. Սահմանում 4 $\leftrightarrow$ Սահմանում 6, եթե բազմությունը դատարկ չէ:
63. Սահմանում 4 $\leftrightarrow$ Սահմանում 7, եթե բազմությունը անվերջ է:
64. Սահմանում 5 $\leftrightarrow$ Սահմանում 6, եթե բազմությունը դատարկ չէ:
65. Սահմանում 5 $\leftrightarrow$ Սահմանում 7, եթե բազմությունը անվերջ է:
66. Սահմանում 6 $\leftrightarrow$ Սահմանում 7, եթե բազմությունը դատարկ չէ և անվերջ է:

Ապացուցել հետևյալ բազմությունների կիսաճանաչելիությունը համաձայն 1 – 7 սահմանումների.

67. $M = \{1,10\}$ (1 – 6)

68. $M = \{3,7,17\}$ (1 – 6)

69. $M = \{n/\ n$ - ը պարզ թիվ է$\}$

70. $M = \{n/\ n$ - ը կատարյալ թիվ է$\}$

71. $M = \{1,3\} \cup \{2k/k \in N\}$

72. $M = \{2,4\} \cup \{2k+1/k \in N\}$

73. $M = \{1,6\} \cup \{n/\ n$ -ը պարզ թիվ է$\}$

74. $M = \{2,6,10,14,...\}$

75. $M = \{5,10,15,20,...\}$

76. $M = \{1,11,111,...\}$

77. $M = \{13,133,1333,...\}$

78. $M = \{x/rm(x,4)=0\}$

79. $M = \{x/\exists k \ \ x = 3^k\}$

80. $M = \{x/x -$ ի բաժանարարների քանակը հավասար է $3\}$

81. $M = \{x/\exists y$ պարզ թիվ, որ $x = y+2\}$

82. $M = \{x/\exists k \ x = 2^k\}$

83. $M = \{x/\exists z \ x = 3^z + 1\}$

84. $M = \{x/x \geq 7$ և $\exists k \ \ k = 2x\}$

85. $M = \{x/\exists k \ \ x = 3^k \cdot 5^k\}$

86. $M = \left\{x/\exists y, \ \ y^2 + y \le x^2 \le \left[\dfrac{y^3}{4}\right]\right\}$

87. $M = \{(x, y)/x = 2y\}$

88. $M = \{C(x, y)/x = 2^y\}$

89. $M = \{(x, y)/x > 2^y\}$

90. $M = \{(x,y)/x \le y^2\}$

91. $M = \{(x,y)/x < y^3\}$

92. $M = \{(x, y)/x \ge 5 \cdot 3^y\}$

93. $M = \{(x, y)/x = 5 \cdot 3^y\}$

94. $M = \{(x, y)/y = 3^x \cdot 7^x\}$

95. $M = \{(x, y)/rm(x,y) = 1\}$

96. $M = \{(x, y)/x \dot{-} 3^y > 2\}$

97. $M = \{(x, y)/\exists y, \ \ x = y^2\}$

98. $M = \{(x, y)/\exists k \ \ x = 7^k \cdot y\}$

99. $M = \{(x, y)/\exists y, \ \ x > 3^y\}$

100. $M = \{(x, y)/\exists z, \ \ x \cdot y = z\}$

101. $M = \{(x, y)/x -$ը զույգ է և $y -$ը պարզ է$\}$

102. $M = \{(x, y)/y -$ը զույգ է և $\exists k \ \ x = 3^k \cdot y\}$

103. $M = \{(x, y)/x > 3^y$ և $\exists k \ y = 3k\}$

104. $M = \{(x, y)/rm(x,3) = 0$ և $rm(y, x) = 0\}$

105. $M = \{(x,y)/x -$ը պարզ է և $y -$ը կատարյալ$\}$

106. $M = \{(x,y)/x = 3k + 1, \ \ y -$ը պարզ է$\}$

107. $M = \{(x,y)/\exists z, x < z < y$ և $z -$ը կատարյալ է$\}$

108. $M = \{(x,y)/\exists z, x^2 + y^2 = z^2\}$

109. $M = \{(x,y) / x - ը$ և $y - ը$ փոխադարձաբար պարզ են$\}$

110. $M = \{(x,y) / x - ի$ և $y - ի$ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կենտ է$\}$

111. $M = \{(x,y) / x - ը$ կատարյալ է և $\exists z\ y = x^z \}$

112. $M = \{(x,y) / x < y^2$ և $y \le x^2\}$

113. $M = \{(x,y) / \exists k\ x \cdot y = 3k + 2\}$

114. $M = \{(x, y) / \exists\, k,\ x = k^3$ և $y \ge x\}$

115. $M = \{(x, y) / \exists\, z,\ xy \dot{-} 1 = z^2\}$

116. $M = \{(x, y) / rm(\min(x, y), 3) = 0$ և $rm(\max(x, y), 4) = 0)\}$

117. $M = \{(x, y, t) / t > x \cdot 3^y\}$

118. $M = \{(x, y, z) / z \ge 3x \cdot (y \dot{-} 1)\}$

119. $M = \{(x, y, z) / x = y \dot{-} 3z\}$

120. $M = \{(x, y, z) / x + y = z\}$

121. $M = \{(x, y, z) / x \dot{-} y = y \dot{-} z\}$

122. $M = \{(x, y, z) / z = 4x \dot{-} 3y + 1\}$

123. $M = \{C^3(x, y, z) / x = y + 2^z\}$

124. $M = \{(x, y) / x \ne y^2\} \cup \{(x, y, z) / z < x + y\}$

6. ՄԱՍՆԱԿԻ ԿԱՐԳԸՆԹԱՑ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԵՎ ԿԻՍԱՃԱՆԱՉԵԼԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐԱԿԱԼՈՒՄ

Հայտնի է, որ $\forall n \ge 1\ \exists F(x_0, x_1, ..., x_n)$ մասնակի կարգընթաց ֆունկցիա, որը համապիտանի է $\mathcal{F}^n$ մասնակի կարգընթաց ֆունկցիաների բազմության համար և, ըստ էության, համարակալում է այդ բազմությունը: Այդպիսի համապիտանի ֆունկցիա կարելի է կառուցել տարբեր եղանակներով [1 - 4]: Օրինակ, Կլինիի կողմից կառուցված համապիտանի ֆունկցիան ընդունված է նշանակել $\mathrm{K}^{n+1}(x_0, x_1, ..., x_n)$-ով:

Մասնավորապես, $\mathrm{K}^2(x_0, x_1)$ համապիտանի ֆունկցիայի միջոցով համարակալվում է $\mathscr{F}^1$ բազմությունը:

Ընդունված են նաև հետևյալ նշանակումները.

$$\forall n \in N \text{ համար } \mathrm{K}^2(n,x) \simeq f_n(x) \simeq æ\, n :$$

Ռայսի թեորեմ

$\mathscr{F}^1$ բազմության ցանկացած ոչ դատարկ սեփական ենթաբազմությանը պատկանող ֆունկցիաների բոլոր կլինյան համարների բազմությունը ճանաչելի չէ:

Հիմնվելով բազմության կիսաճանաչելիության 5-րդ սահմանման վրա, Պոստի կողմից տրվել է կիսաճանաչելի բազմությունների հետևյալ համարակալումը՝

$$\pi_n = \{y / \exists x \mathrm{K}^2(n,x) = y\}$$

(n համար ունեցող կիսաճանաչելի բազմությունն է):

Խնդիրներ

Ապացուցել, որ՝

1. $\exists f(x)$ պ.կ. ֆունկցիա, այնպիսին, որ $\forall x \pi_{f(x)} = \{x\}$:
2. $\exists n$, որ $\pi_n = \{n\}$:
3. $\exists n$, որ $\pi_n = \{n^2\}$:
4. $\exists n$, որ $\pi_n = N \setminus \{n\}$:
5. $\exists g(x, y)$ պարզագույն կարգընթաց ֆունկցիա, այնպիսին, որ $\pi_{g(x,y)} = \{C(n,m) / n \in \pi_x \text{ և } m \in \pi_y\}$:

Հետազոտել հետևյալ բազմությունները ճանաչելի՞ են, թե՞ ոչ, կիսաճանաչելի՞ են, թե՞ ոչ:

6. $M = \{n \ / \ \pi_n = \varnothing\}$
7. $M = \{n \ / \ \pi_n = N\}$
8. $M = \{n \ / \ a \in \pi_n\}$, որտեղ a - ն որոշակի բնական թիվ է:

9. $M = \{ n / \pi_n = \{5\} \}$
10. $M = \{ n / \pi_n = \{3,5\} \}$
11. $M = \{ n / \pi_n = \{3,4,5\} \}$
12. $M = \{ n / \{2,5,8\} \subseteq \pi_n \}$
13. $M = \{ n / \pi_n \subseteq \{1,2\} \}$
14. $M = \{ n / 5 \notin \pi_n \}$
15. $M = \{ n / \pi_n \cup \{2\} = N \}$
16. $M = \{ n / \ ! f_n(15) \}$
17. $M = \{ n / \ \mathit{!} f_n(10) \}$
18. $M = \{ n / \ ! f_n(5) \ \text{և} \ \mathit{!} f_n(7) \}$
19. $M = \{ n / f_n(5) = 7 \}$
20. $M = \{ n / \exists x f_n(x) = 13 \}$
21. $M = \{ n / f_n(3) + f_n(10) = f_n(11) \}$
22. $M = \{ C(n,m) / \pi_n \subset \pi_m \}$

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции.– М.: Наука, 1986.
2. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость.– М.: Мир, 1972.
3. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Ч. 3. Вычислимые функции.– М.: МЦНМО, 1999.
4. Петер Р. Рекурсивные функции.– М.: ИЛ, 1954.
5. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
6. Մարանջյան Հ.Բ., Նիգիյան Ս.Ա. Ընթացակարգերի տեսության դասընթացի խնդիրների լուծման մեթոդական ցուցումներ:– Եր.: ԵՊՀ հրատ., 1984:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Հ.Ռ. ԲՈԼԻԲԵԿՅԱՆ, Հ.Գ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ, Ա.Ա. ՉՈՒԲԱՐՅԱՆ

ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

(Մեթոդական ձեռնարկ)

Ստորագրված է տպագրության 30.09.2008 թ.:
Չափսը՝ 60×84 1/16 : Թուղթը՝ օֆսեթ: Հրատ. 3.0 մամուլ,
տպագր. 3.5 մամուլ= 3.3 պայմ. մամուլի:
Տպաքանակ՝ 100: Պատվեր՝ 97:

ԵՊՀ հրատարակչություն
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Երևանի պետական համալսարանի
օպերատիվ պոլիգրաֆիայի ստորաբաժանում
Երևան, Ալ. Մանուկյան 1: